

Institut Royal Colonial Belge

—
SECTION DES SCIENCES TECHNIQUES
—

**Mémoires. — Collection in-4°
Tome V. — Fascicule 2.**

Koninklijk Belgisch Koloniaal Instituut

—
SECTIE VOOR TECHNISCHE WETENSCHAPPEN
—

**Verhandelingen. — Verzameling in-4°
Boek V. — Aflevering 2.**

NOTES

**SUR L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS
CONFORMES;**

**SUR LA PROJECTION CONFORME DE GAUSS
UTILISÉE AU CONGO BELGE**

PAR

R. PAHAUT

INGÉNIEUR CIVIL (A.I.A.),
DIRECTEUR DU SERVICE DES VOIES NAVIGABLES DU CONGO BELGE,
CAPITAINE-COMMANDANT D'ARTILLERIE DE RÉSERVE
DE LA FORCE PUBLIQUE.



**Avenue Marnix, 25
BRUXELLES**

**Marnixlaan, 25
BRUSSEL**

—
1950

**PRIX : Fr. 220.
PRIJS :**

NOTES
SUR L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS
CONFORMES ;
SUR LA PROJECTION CONFORME DE GAUSS
UTILISÉE AU CONGO BELGE

PAR

R. PAHAUT

INGÉNIEUR CIVIL (A.I.A.),
DIRECTEUR DU SERVICE DES VOIES NAVIGABLES DU CONGO BELGE,
CAPITAINE-COMMANDANT D'ARTILLERIE DE RÉSERVE
DE LA FORCE PUBLIQUE.

Mémoire présenté à la séance du 28 janvier 1949.

INTRODUCTION

Je dédie ces notes à la mémoire d'ÉMILE DELVAUX, major de la Force publique et chef du Service cartographique et géodésique de la Colonie; il avait accepté de rédiger une préface pour ce travail, dont il avait suivi le développement avec intérêt. Je rends hommage à sa haute conception de ce qui fut sa profession, dont il avait fait un idéal.

Le sujet traité s'est imposé pour le calcul des coordonnées rectangulaires dans les fuseaux de GAUSS admis officiellement à la Colonie.

Les coordonnées géographiques des sommets fixés par nos missions de triangulation sont calculées sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880 (1866 pour le Katanga); les formules de transport sont celles de PUISSANT, adoptées par le Coast and geodetic Survey américain; on transforme les coordonnées géographiques en coordonnées rectangulaires par les formules de BÖHLER.

Ces formules de BÖHLER sont données dans le mémoire *Triangulation du Katanga*, de M. l'Ingénieur en chef J. MAURY. Le mémoire *Triangulation du Congo oriental*, du même savant auteur, donne les tables pour le calcul au moyen des formules de BÖHLER sur l'ellipsoïde de CLARKE de 1880.

On peut retrouver les formules originales de BÖHLER dans la publication *Astronomisch und Geodätisch Hilfstafeln*, des docteurs L. AMBRONN et J. DOMKE, en collaboration avec BÖHLER (Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Berlin, 1909).

Je n'ai pu retrouver le mémoire de BÖHLER publié dans un article du *Zeitschrift für Vermessungswesen* en 1909, où ces formules sont certainement établies par voie analytique avec indication du degré d'approximation.

Soucieux de connaître la précision des coordonnées publiées, je me suis posé à nouveau le problème de la correspondance des coordonnées géographiques et des coordonnées rectangulaires de GAUSS. J'ai adopté la méthode indiquée par le Capitaine TARDI, du Service géographique de l'Armée française, dans son ouvrage capital : *Traité de Géodésie* (Gauthier-Villars, 1934). Il s'agit de la représentation conforme intermédiaire de l'ellipsoïde sur une sphère.

J'ai refait ainsi la géométrie de la projection de GAUSS; il en est résulté des formules pratiques de passage dont la précision est connue; l'emploi de ces formules m'a paru simple.

Ces formules devaient être mises en service, cette année, par le regretté major DELVAUX.

Les étapes du calcul et les résultats obtenus doivent intéresser tous ceux qui s'occupent de la géodésie et de la cartographie congolaises : géodésiens, cartographes, hydrographes, géomètres; chacun saura exactement ce qu'est la projection conforme de GAUSS et ce que valent les coordonnées publiées dans ce système. La formule pour le calcul de la convergence méridienne n'est pas indiquée par les mémoires de M. l'Ingénieur en chef MAURY. J'en donne une démonstration que je crois inédite.

Ayant défini la projection de GAUSS, j'ai traité le problème plus général de l'emploi géodésique des projections conformes, c'est-à-dire du calcul direct des triangulations sur le plan, en coordonnées rectangulaires, en conservant toute la précision des mesures; en fait cela revient à établir une correspondance rigoureuse entre les éléments de longueurs, d'orientation et de position sur l'ellipsoïde et sur le plan de la projection de GAUSS.

C'est sur le terrain, en mission de triangulation, que j'ai abordé cet important problème. Je savais qu'il avait été résolu par GAUSS, HELMERT et plus récemment par le lieutenant-colonel d'artillerie LABORDE, du Service géographique de l'Armée française, mais je ne disposais d'aucune documentation spécialisée. Cela m'a valu de reconstruire par des voies nouvelles.

La théorie que je présente pour l'emploi géodésique des projections conformes ne postule que la définition même d'une projection conforme traduite par le rapport K de similitude local. Le mathématicien y verra une heureuse application de la théorie des variations. Le géodésien, le cartographe et l'utilisateur des cartes y trouveront une analyse fructueuse des systèmes conformes.

L'application des formules générales à la projection de GAUSS utilisée au Congo belge conduit à des résultats tellement simples, tout en conservant toute la précision désirable, que la méthode du calcul direct sur la projection semble devoir s'imposer même pour les triangulations principales.

Je forme le vœu, en publiant ces deux notes, que les jeunes géodésiens actuellement en mission au Congo se prennent à aimer cette belle science, comme nous l'avons aimée, parce qu'elle offre de grandes ressources de recherches, de travail d'étude, en plus de ce sentiment, si réconfortant pendant les dures caravanes, de laisser quelque chose de définitif derrière soi.

Léopoldville, juin 1948.

R. PAHAUT.

NOTES

SUR L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS CONFORMES :

SUR LA PROJECTION CONFORME DE GAUSS UTILISÉE AU CONGO BELGE

NOTE SUR LE CALCUL DES TRIANGULATIONS DANS LES SYSTÈMES DE REPRÉSENTATION PLANE CONFORME

On ne peut nier la tendance actuelle à calculer les triangulations directement sur la projection dont on a fait choix pour la représentation d'un pays.

Le premier et le plus grand avantage est la facilité du calcul des coordonnées rectangulaires.

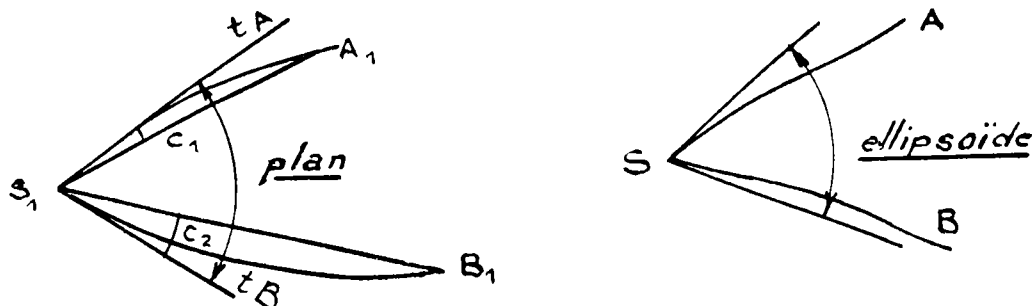
Les mesures d'angles étant à la base de tout travail de planimétrie, les géodésiens se sont naturellement tournés vers les systèmes de représentation plane conforme.

L'objet de cette note est de donner tous les éléments qui permettent le calcul direct sur une projection plane conforme en conservant toute la précision des observations faites sur le terrain.

Nous précisons que nous étudions la concordance entre une surface de référence (ellipsoïde) et un plan. Les lignes et triangles limités par ces lignes sont des lignes géodésiques et des triangles géodésiques sur l'ellipsoïde de référence dont nous étudions le transport au plan suivant les lois d'une « projection » conforme. Il est entendu que les directions observées sur le terrain sont affectées des corrections habituelles :

- 1° de ligne géodésique (entre la section normale et la géodésique);
 - 2° d'altitude du point visé
- et, éventuellement, de
- 3° la correction de déviation de verticale.

Les angles compris entre les lignes géodésiques de l'ellipsoïde et conservés par l'emploi d'une projection conforme se retrouvent au plan entre les tangentes aux transformées de ces géodésiques, comme le montre la figure. Soit, par exemple, le triangle géodésique SAB tracé sur l'ellipsoïde. L'emploi d'une projection conforme transforme SAB de l'ellipsoïde en $S_1A_1B_1$ sur le plan, tel que l'angle des géodésiques SA et SB se retrouve en S_1 entre les tangentes St_A et St_B aux transformées sur le plan des géodésiques SA et SB :



Le calcul sur le plan demande la connaissance de l'angle $A_1S_1B_1$, soit le calcul des corrections c_1 et c_2 .

Le calcul de l'angle c entre la tangente à l'une des extrémités de la transformée au plan d'une ligne géodésique de l'ellipsoïde et la corde rectiligne de cette transformée est le premier problème que nous devons nous poser.

Les formules pour le calcul de ces angles c ont été indiquées en particulier par le lieutenant-colonel LABORDE, du Service géographique de l'Armée française. On lira avec intérêt la démonstration directe que nous donnons de ces formules.

Les formules de correspondance ellipsoïde-plan permettent le calcul, avec toute la précision que l'on veut, des coordonnées rectangulaires des deux points connus qui constituent la base de départ. La seule connaissance des angles c permet dès lors le calcul direct de la triangulation sur le plan.

Nous indiquerons également dans cette note une formule donnée par le lieutenant-colonel LABORDE pour le calcul de l'altération de longueur introduite par la projection.

Nous terminerons par l'application des formules de LABORDE à la projection conforme de GAUSS utilisée au Congo belge.

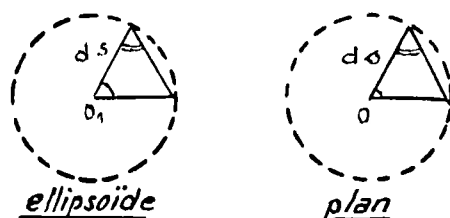
I. — ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE GÉNÉRALE
DES TRANSFORMÉES PLANES DE GÉODÉSQUES
DANS UN SYSTÈME
DE REPRÉSENTATION CONFORME.

Un système de projection conforme conserve les angles; les figures infiniment petites, correspondantes, sont semblables; un cercle infiniment petit sur l'ellipsoïde se transforme en un cercle infiniment petit sur le plan, les centres étant des points correspondants.

Il s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une projection soit conforme est

$$K dS = ds,$$

les dS et ds étant des éléments de longueur correspondants comptés à partir de points O_1 et O correspondants sur des directions correspondantes, quelle que soit



la direction de dS , la valeur K étant caractéristique des points correspondants O_1 et O . (Cfr., p. 66, conception projection conforme.) K peut donc se concevoir comme une fonction des coordonnées X et Y du plan; sa valeur numérique apparaît comme l'échelle locale de la projection en chaque point (X, Y) .

Considérons la ligne géodésique entre les deux points A_1 et B_1 sur l'ellipsoïde, soit AB , sa transformée par une projection sur le plan.

La longueur

$$S_{A_1}^{B_1} = \int_A^B \frac{ds}{K} = \int_0^s \frac{ds}{K}.$$

s étant la longueur de l'arc de transformée plane AB et l'intégrale étant prise le long de cette courbe du plan.

Le fait que A_1B_1 est géodésique sur l'ellipsoïde impose la condition de minimum à

$$S_{A_1}^{B_1} = \int_0^s \frac{ds}{K}.$$

Notons $y = f(x)$ l'équation de la courbe plane A B :

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

La nature du problème nous indique de ne considérer que des ds positifs; nous prendrons le radical $\sqrt{1 + y'^2}$ avec son double signe, le + correspondant à un sens A B sur la courbe vers les x croissants, le — correspondant aux x décroissants.

Exprimons le minimum de

$$S_{A_1}^B = \int_0^s \frac{ds}{K} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} dx,$$

sous-entendues les conventions de signe définies ci-dessus.

Une condition nécessaire de l'extrémum de l'intégrale définie est que sa variation première soit nulle; la théorie des variations exprime cette condition par l'équation principale

$$\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} \right)}{\partial y} - \frac{d \left[\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} \right)}{\partial y'} \right]}{dx} = 0, \quad (1)$$

où nous remarquons tout de suite que le signe du radical $\sqrt{1 + y'^2}$ est sans influence.

On a successivement

$$\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} \right)}{\partial y} = - \frac{1}{K^2} \frac{\partial K}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} \right)}{\partial y'} = \frac{y'}{K \sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \left[\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{K} \right)}{\partial y'} \right]}{dx} &= \frac{d \left[\frac{y'}{K \sqrt{1 + y'^2}} \right]}{dx} = - \frac{1}{K^2} \left[\frac{\partial K}{\partial y} y' + \frac{\partial K}{\partial x} \right] \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y''}{K \sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y'' y'^2}{K (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{1}{K^2} \left[\frac{\partial K}{\partial y} y' + \frac{\partial K}{\partial x} \right] \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y''}{K (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

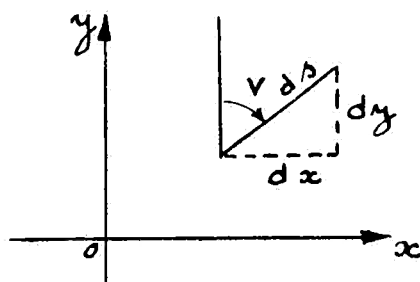
et (1) devient, après réductions,

$$\frac{1}{K} \left[\frac{\partial K}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] + \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

formule où nous allons faire apparaître les éléments géométriques, longueur, direction et courbure.

Dans le système cartésien habituel, en notant V les gisements comptés à partir de l'axe Oy dans le sens des aiguilles d'une montre, on a les formules générales

$$\begin{aligned} dx &= ds \sin V \\ dy &= ds \cos V \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin V \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \cos V, \end{aligned}$$



où la convention de signe pour le radical, définie plus haut, est valable. Rappelons aussi que la courbure γ des courbes planes $y = f(x)$ est donnée par $\gamma = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, où le radical est toujours pris avec le signe $+$, de façon à laisser à γ le signe de y'' .

Dès lors, nous écrivons l'équation générale des transformées planes des géodésiques de l'ellipsoïde par une projection conforme

$$\frac{1}{K} \left[\frac{\partial K}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right] = \mp \gamma,$$

ou encore

$$\frac{1}{K} \left[\frac{\partial K}{\partial y} \sin V - \frac{\partial K}{\partial x} \cos V \right] = \mp \gamma, \quad (1')$$

suivant que V est compris entre 0 et π ou entre π et 2π .

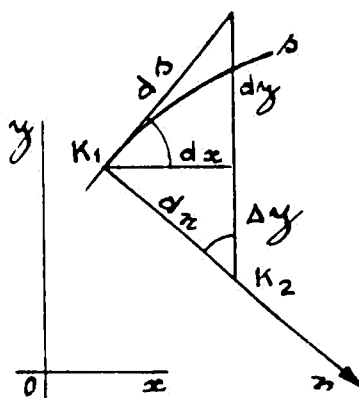
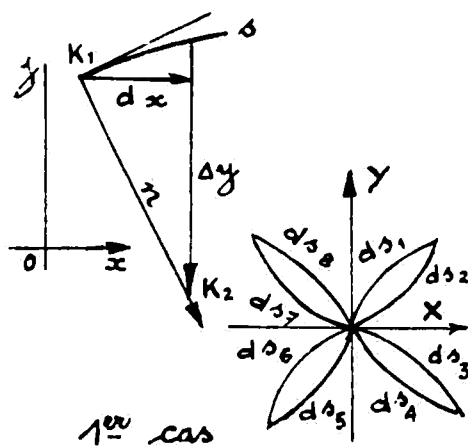
Dans cette formule le radical $\sqrt{1+y'^2}$ est toujours positif, la courbure γ a le signe de y'' , positive lorsque la concavité est tournée vers les y positifs, négative dans le cas contraire.

Cette formule a été indiquée par le lieutenant-colonel LABORDE, du Service géographique de l'Armée française.

La démonstration que j'ai donnée ci-dessus est, je crois, inédite.

REMARQUE IMPORTANTE. — Nous allons montrer que la concavité de la courbe est toujours ouverte vers la région des K décroissants.

Ceci permettra de déterminer sans hésitation le signe des corrections c à apporter aux angles des triangles géodésiques tracés sur l'ellipsoïde. Il suffit d'interpréter géométriquement la formule (1').



Étudions la variation de K suivant la normale n en un point de la courbe. Nous orientons positivement la normale vers le centre de courbure.

Nous passerons de K_1 à K_2 par des variations suivant les axes OX et OY , de façon à introduire les éléments de (1').

Les huit cas possibles sont résumés par la figure ci-contre, où les ds sont toujours positifs.

Par définition (nature du problème), le rapport K est toujours positif.

Notons

$$dK = K_2 - K_1, \text{ — relatif à } (dn)_{K_1},$$

$$dK = \frac{\partial K}{\partial x} dx + \frac{\partial K}{\partial y} \Delta y,$$

ds, dx, dy, dn sont positifs.

Δy est négatif.

En valeurs absolues, on a

$$\left[\frac{\Delta y}{dx} \right] = \left[\frac{dx}{dy} \right] = \left[\frac{dn}{ds} \right]$$

et en signe

$$\Delta y = - \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \text{ et } \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}.$$

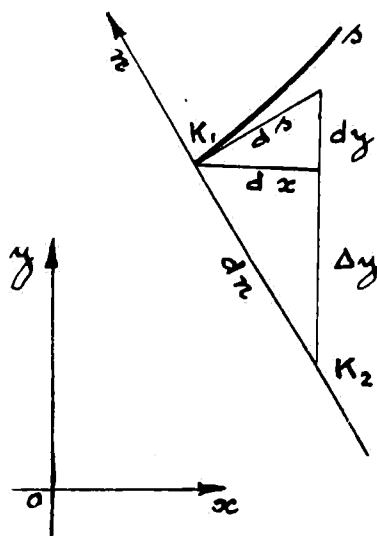
On tire

$$\frac{dK}{dn} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dn} = \gamma$$

et nous pouvons conclure :

γ étant négative, $\frac{dK}{dn}$ est < 0 ; dK est négatif vers le centre de courbure; la courbe tourne sa concavité vers les K décroissants.

2° cas : ds, dx, dy sont positifs;
 dn et Δy sont négatifs.



En grandeur et signe,

$$\Delta y = - \left(\frac{dx}{dy} \right)^2$$

$$\frac{dx}{dn} = - \frac{dy}{ds}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dn} &= \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dx}{dn} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{(dx)^2}{dy dn} \\ \frac{dK}{dn} &= -\frac{\partial K}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{dx}{ds} \\ \frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dn} &= -\gamma.\end{aligned}$$

γ étant positive, $\frac{dK}{dn}$ est < 0 ; dK est positif dans le sens centripète; la courbe tourne sa concavité vers les K décroissants.

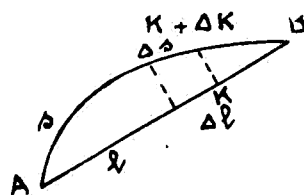
On établirait de même, par l'examen des huit cas possibles, que l'équation générale (1') permet d'écrire

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dn} = \pm \gamma,$$

suivant que la courbure est négative ou positive et que la concavité est toujours ouverte vers les K décroissants.

On peut montrer intuitivement le sens de la courbure de façon simple, comme suit :

Soient la transformée plane s et sa corde rectiligne. Un système de projection n'est à retenir que si K est voisin de l'unité et varie lentement.



Soient K la valeur du rapport en un point de la corde, $K + \Delta K$ la valeur caractérisant le point de la courbe correspondant, comme l'indique la figure.

On peut écrire, en repassant à l'ellipsoïde,

$$\int_{A_1}^{B_1} \frac{dl}{K} > \int_{A_1}^{B_1} \frac{ds}{K + \Delta K},$$

puisque $A_1 B_1$ est géodésique (plus courte distance).

Considérons les intégrales comme les sommes de tous les éléments $\frac{\Delta l}{K}$ et $\frac{\Delta s}{K + \Delta K}$.

On a évidemment toujours $\Delta l < \Delta s$.

Il faut dès lors conclure que tous les ΔK sont positifs, ce qui revient à dire que la concavité est ouverte vers les K décroissants.

Les systèmes de représentation plane conforme sont toujours, soit à point central, soit à axe central; les K croissent ou décroissent de ces régions centrales vers les « extrémités » du plan; le sens de la courbure des transformées planes de géodésiques sera donc toujours déterminé sans ambiguïté.

Considérations sur la valeur numérique de $\gamma = \frac{1}{R}$.

La forme $\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{du} = \frac{1}{R}$ permet de se rendre compte de l'ordre de grandeur du minimum de R , rayon de courbure des transformées planes de géodésiques.

Nous avons montré que K apparaît comme l'échelle locale de la projection; c'est une fonction de X et Y que nous mettons sous la forme $K = 1 + f(X, Y)$.

Un critère d'emploi des systèmes de projection est qu'ils présentent un K qui reste voisin de l'unité et qui varie lentement; il en résulte de faibles altérations de longueurs et les figures transformées au plan restent semblables aux figures de l'ellipsoïde sur des zones assez étendues.

$f(X, Y)$ sera donc petit et variera lentement; nous supposons dans son développement en série de MAC LAURIN que les termes contenant les dérivées d'ordre supérieur au second sont négligeables : l'étude des divers systèmes de projection conforme justifie cette hypothèse, raisonnable à priori.

Les divers systèmes présentent généralement une symétrie par rapport aux axes X et Y . Nous nous plaçons dans ce cas pour rechercher un ordre de grandeur du minimum de R .

On a

$$f(X, Y) = 1 + f'(00) + X \left(\frac{\partial f'}{\partial X} \right)_{00} + Y \left(\frac{\partial f'}{\partial Y} \right)_{00} + \frac{X^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial X^2} \right)_{00} + XY \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial X \partial Y} \right)_{00} + \frac{Y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial Y^2} \right)_{00}.$$

La symétrie impose

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial X} \right)_{00} - \left(\frac{\partial f'}{\partial Y} \right)_{00} = \frac{\partial^2 f'}{\partial X \partial Y} = 0.$$

Nous considérons le cas, le plus général, où $f(X, Y)$ varie de 0, à l'origine, centre de la carte à une valeur maximum (valeur absolue) correspondant à la portée d'emploi de la projection. Ceci revient à écrire

$$\begin{aligned} f'(00) &= 0, \\ f(X, Y)_{\max} &= M. \end{aligned}$$

Ce maximum M est défini comme suit par l'Ingénieur en chef MAURY, chef de la Section de géodésie à l'Institut cartographique militaire (*Cours de Topographie de l'École d'application de l'artillerie et du génie*, 3^e volume) :

« La portée de l'emploi d'une projection conforme est limitée par les déformations de longueurs qui ne doivent pas dépasser l'ordre de grandeur des erreurs commises dans la mesure des longueurs par les moyens directs ou indirects habituels.

» Il semble qu'on puisse admettre $\frac{1}{2.000}$ comme limite. »

D'autre part, le capitaine TARDI, professeur au Service géographique de l'Armée française, indique pour limite admissible des déformations de longueur, la valeur $\frac{1}{1.000}$ (*Traité de Géodésie*).

Retenons

$$K = 1 + f(X, Y) = 1 + \frac{X^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right)_{00} + \frac{Y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right)_{00}.$$

Les 3 types de projections conformes généralement utilisés sont :

- 1° la projection conforme de GAUSS;
- 2° la projection conforme de LAMBERT;
- 3° la projection stéréographique.

Les portées y sont limitées respectivement par la longitude (fuseaux), la latitude (zone), la distance à l'origine (calotte).

Les K respectifs se développent sous les formes :

$$\begin{aligned} 1) K &= 1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \dots \\ 2) K &= 1 + \frac{Y^2}{2 R_0^2} + \dots \\ 3) K &= 1 + \frac{X^2 + Y^2}{4 R_0^2}, \end{aligned}$$

où R_0 est le rayon d'une sphère de courbure moyenne.

$R_0 = 6.400$ km environ.

Nous nous placerons dans les limites de déformation admises par les auteurs en faisant correspondre les limites de portée par

$$\begin{aligned} 1) \frac{X^2}{2 R_0^2} &= \frac{1}{2.000}; \\ 2) \frac{Y^2}{2 R_0^2} &= \frac{1}{2.000}; \\ 3) \frac{X^2 + Y^2}{4 R_0^2} &= \frac{1}{2.000}. \end{aligned}$$

Nous verrons par la suite qu'une réduction d'échelle permet d'étendre la portée en gardant les mêmes altérations des longueurs $\left(\text{maximum } \frac{1}{2.000} \right)$.

On posera :

- 1) $\frac{X^2}{2 R_0^2} = \frac{1}{1.000}$ et la portée $X = 282$ Km.
- 2) $\frac{Y^2}{2 R_0^2} = \frac{1}{1.000}$ et la portée $Y = 282$ Km.
- 3) $\frac{X^2 + Y^2}{4 R_0^2} = \frac{1}{1.000}$ et la portée $r' = \sqrt{X^2 + Y^2} = 400$ Km.

Pour évaluer l'ordre de grandeur du rayon de courbure R des transformées de géodésiques, nous acceptons

$$K = 1 \text{ et } \frac{dK}{dn} = \frac{1}{R}.$$

Au point de vue de la direction (orientation), $\frac{dK}{dn}$ sera évidemment maximum le long des trajectoires orthogonales aux réseaux équi- K .

Nous avons pour ces dérivées :

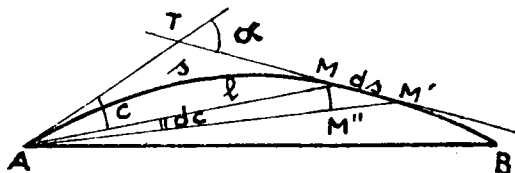
- 1) $\left(\frac{dK}{dn}\right)_{\max} = \frac{X}{R_0^2}$ où si $X = 282$ Km on a $R_{\min} = 140.000$ Km.
- 2) $\left(\frac{dK}{dn}\right)_{\max} = \frac{Y}{R_0^2}$ où si $Y = 282$ Km on a $R_{\min} = 140.000$ Km.
- 3) $\left(\frac{dK}{dn}\right)_{\max} = \frac{r'}{2 R_0^2}$ où si $r' = 400$ Km on a $R_{\min} = 200.000$ Km.

Nous acceptons, dans ce qui suit, $R = 140.000$ km comme limite inférieure des rayons de courbure des transformées planes des géodésiques de l'ellipsoïde.

II. — FORMULE POUR CALCULER LES ANGLES C.

La formule que nous allons établir est valable pour toute courbe plane à grands rayons de courbure.

Soient AB la transformée sur le plan de la géodésique A_1B_1 de l'ellipsoïde; M un point de cette transformée; AT la tangente en A , MM' la tangente en M ; $MM' = ds$.



Nous désirons calculer l'angle $c_{AB} = \widehat{TAB}$. M décrivant la courbe de A vers B , c varie de 0 à c_{AB} .

Abaissons MM'' perpendiculaire sur AM' :

$$\begin{aligned} MM'' &= l dc \\ &= ds \sin(\alpha - c) \\ l dc &= ds \sin(\alpha - c). \end{aligned} \quad (1)$$

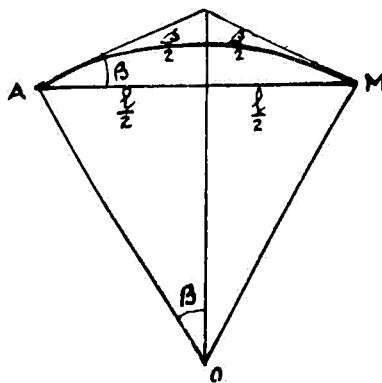
Nous allons exprimer l en fonction de s .

*
* *

Cherchons d'abord une limite supérieure de s .

Nous avons établi que le rayon de courbure minimum des transformées planes de géodésiques est $R = 140.000$ km.

Nous considérons des géodésiques dont la longueur s est de l'ordre de 100 km.



Une limite supérieure de s peut s'obtenir en remplaçant s par un arc de circonférence de rayon égal à 140.000 km.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{s}{2R} \\ \frac{l}{2} &= R \sin \beta = R \left[\beta - \frac{\beta^3}{6} + \dots \right] \\ &= R \left[\frac{s}{2R} - \frac{s^3}{48R^3} + \dots \right] \\ l &= s \left[1 - \frac{s^2}{24R^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

et si nous remplaçons l par cette limite supérieure de s , nous commettrions une erreur relative de l'ordre de $\frac{s^2}{24R^2}$ dont le maximum est

$$\frac{10.000}{24 \times (140.000)^2} = \frac{1}{48.000.000}$$

(précision de loin supérieure à la précision géodésique maximum qui est de l'ordre de $\frac{1}{1.000.000}$).

L'ordre de grandeur de l'erreur sur β , si l'on prend l en lieu et place de s , serait au plus égal à

$$\Delta\beta = \frac{\Delta s}{2R} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{s^3}{24R^2} = \frac{1}{135.360.000.000},$$

soit, en secondes sexagésimales, $\Delta\beta < 0'',000.002$.

*
* *

Ces ordres de grandeur justifient l'assimilation de la transformée plane à la circonférence qui lui est tangente en A et qui passe par M; la longueur de cette circonférence est en effet plus petite que la limite supérieure de s , cette limite supérieure étant l'arc de circonférence sous-tendu par l et de rayon $R = 140.000$ km.

Appelons r le rayon de la circonférence tangente en A et passant par M; on a évidemment $r > 140.000$ km.

On a

$$s = 2r c,$$

$$l = 2r \sin c = 2r \left[c - \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{120} + \dots \right].$$

On a aussi

$$\sin(\alpha - c) = (\alpha - c) - \frac{(\alpha - c)^3}{6} + \frac{(\alpha - c)^5}{120} - \dots$$

et par suite

$$l = s \left[1 - \frac{c^2}{6} + \frac{c^4}{120} - \dots \right]$$

et, par remplacement dans (1),

$$sdc \left[1 - \frac{c^2}{6} + \frac{c^4}{120} - \dots \right] = (\alpha - c) ds \left[1 - \frac{(\alpha - c)^2}{6} + \frac{(\alpha - c)^4}{120} - \dots \right].$$

L'ordre de grandeur maximum de c est $\frac{100}{280.000}$ (soit, en secondes sexagésimales, $73''$).

L'ordre de grandeur de $\frac{c^2}{6}$ (max.) est $\frac{1}{48.000.000}$.

De plus

$$\frac{c^2}{6}, \frac{c^4}{120}, \dots \text{ et } \frac{(\alpha - c)^2}{6}, \frac{(\alpha - c)^4}{120}, \dots$$

sont de mêmes ordres respectifs.

Nous pouvons accepter, pour le calcul des angles c ,

$$s dc = (\alpha - c) ds$$

ou

$$s \frac{dc}{ds} + c = \alpha. \quad (2)$$

Exprimons α . Si nous notons γ la courbure en un point de l'arc s , on a par définition

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{et} \quad \alpha = \int_0^s \gamma ds;$$

γ est une fonction de s que les éléments du problème nous indiquent continue et admettant des dérivées continues et définies.

La fonction γ est développable en série de MAC LAURIN :

$$\gamma = \gamma_A + \gamma'_A s + \gamma''_A \frac{s^2}{2} + \dots$$

Par remplacement, nous aurons

$$\alpha = \int_0^s ds (\gamma_A + \gamma'_A s + \gamma''_A \frac{s^2}{2} + \dots)$$

et l'intégration donne ($\gamma_A, \gamma'_A, \gamma''_A, \dots$ sont des constantes)

$$\alpha = \gamma_A s + \gamma'_A \frac{s^2}{2} + \gamma''_A \frac{s^3}{6} + \dots$$

et l'équation (2) devient

$$s \frac{dc}{ds} + c = \gamma_A s + \gamma'_A \frac{s^2}{2} + \gamma''_A \frac{s^3}{6} + \dots \quad (2')$$

type simple de l'équation différentielle linéaire du premier ordre, que nous intégrons par la méthode de la variation de la constante arbitraire.

Privée de son second membre, l'équation s'écrit

$$s \frac{dc}{ds} + c = 0,$$

qui admet pour intégrale générale

$$s c = M, \quad (3)$$

M étant une constante.

Supposons M fonction de s et déterminons cette fonction pour que (3) satisfasse à (2').

Nous dérivons et écrivons

$$\frac{dM}{ds} = s \frac{dc}{ds} + c = \gamma_A s + \gamma'_A \frac{s^2}{2} + \gamma''_A \frac{s^3}{6} + \dots$$

et, par intégration,

$$M = \gamma_A \frac{s^2}{2} + \gamma'_A \frac{s^3}{6} + \gamma''_A \frac{s^4}{24} + \dots + N,$$

N étant une constante.

A l'origine A, $s = c = M = 0$ et par suite $N = 0$.

En remplaçant dans (3) on trouve

$$c = \gamma_A \frac{s}{2} + \gamma'_A \frac{s^2}{6} + \gamma''_A \frac{s^3}{24} + \dots \quad (4)$$

Cette formule est donnée dans le *Traité général des Projections*, par E. DRIENCOURT et le lieutenant-colonel LABORDE (Paris, Hermann, 1932). Elle peut se simplifier en considérant la courbure au point extrême du premier tiers de l'arc s compté à partir de A.

En effet,

$$\gamma_{\frac{1}{3}} = \gamma_A + \frac{s}{3} \gamma'_A + \frac{s^2}{18} \gamma''_A + \dots$$

peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \gamma_A s = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s - \frac{1}{6} \gamma'_A s^2 - \frac{1}{36} \gamma''_A s^3 - \dots$$

et finalement on a la formule suivante pour c , qui ne contient plus de terme en γ' :

$$c = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s + \frac{1}{72} \gamma''_A s^3 + \dots$$

Nous avons indiqué plus haut qu'un système de projection conforme n'est intéressant que si K reste voisin de l'unité et varie lentement. Dès lors, la formule

$$|\gamma| = \frac{1}{K} \frac{dK}{dn}$$

permet de préjuger que le terme $\frac{1}{72} \gamma''_A s^3$ et les suivants seront négligeables.

L'étude des divers systèmes montre que pratiquement on peut ne conserver que

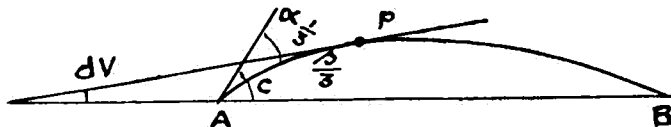
$$c = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s.$$

La courbure sera calculée par la formule donnée plus haut :

$$|\gamma_{\frac{1}{3}}| = \frac{1}{K_{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_{\frac{1}{3}} \sin V_{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{\frac{1}{3}} \cos V_{\frac{1}{3}} \right].$$

Mais cette dernière formule ne sera réellement pratique que si $\sin V_{\frac{1}{3}}$ et $\cos V_{\frac{1}{3}}$ peuvent s'expliquer facilement en fonction des coordonnées rectangulaires.

Je démontre ci-dessous que, pour le calcul de γ et de c , on peut, sans erreur sensible, remplacer le gisement de la tangente au premier tiers par le gisement de la corde rectiligne.



Nous admettons que, dans le cas des transformées planes de géodésiques, γ'' et les dérivées suivantes sont pratiquement négligeables, c'est-à-dire

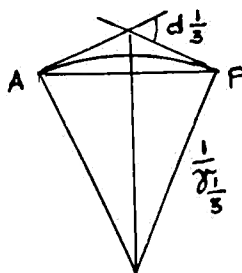
$$c = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s.$$

En remplaçant dans le calcul de $\gamma_{\frac{1}{3}}$ le gisement $V_{\frac{1}{3}}$ par le gisement V de la corde rectiligne, nous commettons l'erreur dV :

$$dV = c - \alpha_{\frac{1}{3}}.$$

Calculons $\alpha_{\frac{1}{3}}$. Dans la limite d'approximation admise,

$$c = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s,$$



l'équation de la circonférence $\gamma_{\frac{1}{3}}$ remplace l'équation de la transformée et l'on a

$$\frac{s}{3} = \frac{1}{\gamma_{\frac{1}{3}}} \alpha_{\frac{1}{3}}; \quad \alpha_{\frac{1}{3}} = \gamma_{\frac{1}{3}} \frac{s}{3}.$$

Dès lors,

$$dV = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s - \frac{1}{3} \gamma_{\frac{1}{3}} s = \frac{1}{6} \gamma_{\frac{1}{3}} s$$

Dans

$$c = \frac{1}{2} \frac{1}{K_{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_{\frac{1}{3}} \sin V_{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{\frac{1}{3}} \cos V_{\frac{1}{3}} \right] s,$$

faisons varier $V_{\frac{1}{3}}$ et donnons aux différentielles le sens d'erreurs; on a

$$dc = \frac{1}{2} \frac{1}{K_{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_{\frac{1}{3}} \cos V_{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{\frac{1}{3}} \sin V_{\frac{1}{3}} \right] s dV_{\frac{1}{3}},$$

soit, en remplaçant,

$$dc = \frac{1}{2} \frac{1}{K_{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_{\frac{1}{3}} \cos V_{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{\frac{1}{3}} \sin V_{\frac{1}{3}} \right] s \left[\gamma_{\frac{1}{3}} \frac{s}{6} \right].$$

Remarquons que

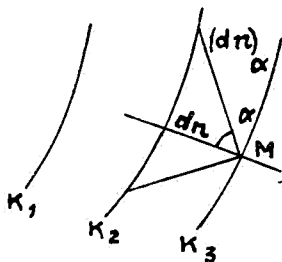
$$\frac{1}{K_{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_{\frac{1}{3}} \cos V_{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{\frac{1}{3}} \sin V_{\frac{1}{3}} \right]$$

est la courbure d'une transformée plane de géodésique perpendiculaire en P à la transformée APB; notons cette courbure Γ et il vient

$$dc = \frac{s^2}{12} \Gamma \gamma_{\frac{1}{3}}.$$

Cherchons le maximum du produit $\Gamma \gamma_{\frac{1}{3}}$.

Chaque projection conforme fournit un réseau de courbes équi-K, défini par $K = 1 + f(X Y)$.



Soient les courbes équi-K, cotées $K_1, K_2, K_3, \dots$; M, un point du plan, sur K_3 , par exemple.

Les courbures des transformées planes de géodésiques sont données par

$$\gamma = \frac{1}{K} \frac{dK}{dn}.$$

Considérons $|K_2 - K_3| = dK$ relatif à dn compté sur la normale en M à une transformée de géodésique tangente à l'équi-K.

La courbure de cette transformée est $C = \frac{1}{K} \frac{dK}{dn}$.

Toutes les courbures des transformées de géodésiques passant par M sont reliées à C et sont données par

$$(dn)_\alpha = \frac{dn}{\cos \alpha} \quad \gamma = \frac{1}{K} \frac{dK}{dn} \cos \alpha = C \cos \alpha,$$

α définissant l'orientation de la normale à chaque transformée considérée.

Le produit de deux courbures de transformées perpendiculaires l'une sur l'autre sera donc de la forme $c^2 \sin \alpha \cos \alpha$ dont le maximum est $\frac{c^2}{2}$.

Le maximum de

$$dc = \frac{s^2}{12} \Gamma \gamma_{\frac{1}{3}} = \frac{s^2}{12} \frac{C^2}{2},$$

où nous donnons à C sa plus grande valeur, soit $C = \frac{1}{140.000}$.

Pour une géodésique de $s = 100$ km, nous obtiendrions

$$(dc)_{\max} = \frac{10.000}{24 \times 2 \times 100.000^2} = \frac{1}{48.000.000},$$

soit, en secondes sexagésimales, environ 0'',004, évidemment négligeable.

III. — FORMULE POUR LE CALCUL DES ALTÉRATIONS DE LONGUEUR.

La formule ci-dessous donne le rapport entre la plus courte distance S mesurée entre deux points sur l'ellipsoïde et la longueur s de la transformée plane de cette géodésique par l'emploi d'une projection conforme.

Ce problème se présente si l'on désire introduire dans le calcul d'une triangulation sur le plan une longueur mesurée sur le terrain (base), cette longueur ayant été évidemment réduite à la surface de référence. La topométrie peut aussi demander la longueur sur l'ellipsoïde de la géodésique reliant deux points connus par leurs coordonnées sur le plan.

Reprenons

$$S_A^B = \int_0^s \frac{ds}{K}$$

et développons la fonction $\frac{1}{K}$ de s (à travers X et Y) en série de MAC LAURIN, l'origine étant le point sur l'arc s au milieu de A B :

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{1}{K}\right)_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{K}\right)'_{\frac{1}{2}} s + \left(\frac{1}{K}\right)''_{\frac{1}{2}} \frac{s^2}{2} + \dots,$$

la notation $\frac{1}{2}$ se rapportant à ce point milieu.

L'intégrale devient

$$S_A^B = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} ds \left[\left(\frac{1}{K} \right)_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{K} \right)'_{\frac{1}{2}} s + \left(\frac{1}{K} \right)''_{\frac{1}{2}} \frac{s^2}{2} + \dots \right]$$

L'intégration est directe, les

$$\left(\frac{1}{K} \right)_{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{K} \right)'_{\frac{1}{2}}, \dots$$

étant des constantes, et les termes intégrés contenant les puissances paires de s disparaissent.

On obtient

$$S_A^B = \left(\frac{1}{K} \right)_{\frac{1}{2}} s + \left(\frac{1}{K} \right)''_{\frac{1}{2}} \frac{s^3}{24} + \dots,$$

formule indiquée par le lieutenant-colonel LABORDE. Des remarques faites précédemment sur les longueurs respectives de l'arc de transformée plane de géodésique et de sa corde rectiligne il résulte que pour le calcul pratique on pourra prendre la longueur l de cette corde rectiligne au lieu de s .

IV. — APPLICATION A LA PROJECTION DE GAUSS UTILISÉE AU CONGO BELGE.

La projection de GAUSS utilisée au Congo belge est étudiée dans notre note : *Correspondance des coordonnées géographiques et des coordonnées rectangulaires de la projection conforme de GAUSS pour les régions équatoriales.*

Le système de projection consiste en :

1° le passage conforme de l'ellipsoïde à une sphère de courbure moyenne en un point de l'équateur;

2° sur cette sphère, choisir un méridien comme axe central; considérer ce méridien central comme l'équateur d'une projection conforme de MERCATOR.

C'est le système de la Doppelprojektion de SCHREIBER, adopté par la section de géodésie de la Landesaufnahme.

Pour les régions équatoriales, les formules de passage peuvent être :

1° passage de l'ellipsoïde à la sphère de courbure moyenne $R_0 = a \sqrt{1 - e^2}$;

(λ, φ) sont les coordonnées longitude, latitude de l'ellipsoïde; (λ', φ') sont les coordonnées longitude, latitude de la sphère

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$A = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}} \lg \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right] - \frac{e}{2\sqrt{1-e^2}} \lg \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi}$$

$$h = \frac{A \cos \varphi}{2 M \sin 1''} \left[1 - \frac{A \sin \varphi}{2 M} \right]$$

$$\varphi' - \varphi = 2 h;$$

2° passage au plan cartésien X, Y :

$$\sin x' = \cos \varphi' \sin \lambda',$$

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2},$$

$$y' = \varphi' + \sigma,$$

$$X = R_0 \lg_e \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right],$$

$$Y = R_0 y'.$$

Le rapport de similitude local de la transformation ellipsoïde-sphère est

$$K_1 = \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}.$$

Le rapport de similitude local du passage de la sphère au plan est

$$K_2 = \frac{1}{\cos x'}.$$

Le rapport de similitude local du passage de l'ellipsoïde au plan est donc

$$K = K_1 K_2 = \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\cos x'}.$$

Il est possible de développer $\frac{1}{\cos x'}$ en fonction des coordonnées rectangulaires.

Reprenons

$$X = R_0 \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right),$$

que nous écrivons, par inversion,

$$e^{\frac{X}{R_0}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right).$$

On a successivement

$$\begin{aligned}\cos x' &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x'\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x'\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right) &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right)}} \\ \text{et } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right)}}.\end{aligned}$$

Rappelons $\sin x' = \cos \varphi' \sin \lambda'$, où λ' est limité à quelques degrés; $\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}$ est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$; le radical est donc toujours positif.

La substitution donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x'} &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + e^{\frac{2X}{R_0}}} \sqrt{1 + e^{\frac{2X}{R_0}}}}{e^{\frac{X}{R_0}}} \\ \frac{1}{\cos x'} &= \frac{1}{2} \frac{1 + e^{\frac{2X}{R_0}}}{e^{\frac{X}{R_0}}} = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{X}{R_0}} + e^{\frac{X}{R_0}} \right].\end{aligned}$$

Développons les exponentielles

$$\begin{aligned}e^{-\frac{X}{R_0}} &= 1 - \frac{X}{R_0} + \frac{X^2}{2 R_0^2} - \frac{X^3}{3! R_0^3} + \frac{X^4}{4! R_0^4} - \frac{X^5}{5! R_0^5} + \frac{X^6}{6! R_0^6} \cdots \\ e^{\frac{X}{R_0}} &= 1 + \frac{X}{R_0} + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^3}{3! R_0^3} + \frac{X^4}{4! R_0^4} + \frac{X^5}{5! R_0^5} + \frac{X^6}{6! R_0^6} \cdots\end{aligned}$$

L'addition permet d'écrire

$$\frac{1}{\cos x'} = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{X}{R_0}} + e^{\frac{X}{R_0}} \right] = 1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \frac{X^6}{720 R_0^6} + \cdots$$

et le rapport de similitude local $K = K_1 K_2$ devient

$$K = \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \cdots \right]$$

Cette forme va nous permettre de déterminer la portée, c'est-à-dire les limites d'emploi de la projection.

26 L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS CONFORMES

La limite d'emploi est définie par l'altération maximum admise à priori pour les longueurs.

Nous admettons, avec M. l'Ingénieur en chef MAURY, l'ordre de grandeur $\frac{1}{2.000}$ pour le maximum tolérable (le capitaine TARDI accepte la valeur $\frac{1}{1.000}$).

Par définition de K, rapport de similitude local, nous écrivons donc

$$K \text{ extremum} = 1 \pm \frac{1}{2.000}.$$

Nous allons montrer que le procédé de la réduction d'échelle de TISSOT permet de réduire les altérations extrêmes de longueur, ce qui étend le champ de la projection conforme en conservant les mêmes altérations extrêmes.

Dans un système conforme, si nous notons $K = 1 + k$, k varie généralement de 0, au centre de la carte, à une valeur extrême δ aux bords de la carte.

$$K \text{ extremum} = 1 + \delta.$$

Multiplions toutes les coordonnées rectangulaires par le facteur $\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$.

On avait

$$K dS = ds = \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}.$$

La multiplication de TISSOT donne

$$K \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) dS = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} = (ds)'. \quad .$$

Le nouveau système reste donc conforme et caractérisé par un rapport de similitude local égal à

$$K \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = (1 + k) \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = 1 + k - \frac{\delta}{2} - \frac{k\delta}{2}.$$

Négligeons le double produit $\frac{k\delta}{2}$ devant k et $\frac{\delta}{2}$; le nouveau rapport de similitude local varie entre

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\delta}{2} \text{ pour } k = 0 \\ & \text{et } 1 + \frac{\delta}{2} \text{ pour } k = \delta, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'altération extrême de longueur est bien réduite de moitié par le procédé de TISSOT.

Dans l'étude pratique qui suit nous limiterons la portée de la projection par K extrémum $= \pm \frac{1}{1.000}$, puisque la simple application de la réduction d'échelle de TISSOT limitera les altérations extrêmes à $\frac{1}{2.000}$.

Ceci étant précisé, cherchons les limites d'emploi de la portée de la projection de GAUSS utilisée au Congo.

Posons

$$\frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} = 1 - \alpha,$$

$$1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots = 1 + \beta.$$

On a

$$K = (1 - \alpha)(1 + \beta)$$

et, en négligeant le produit du second ordre $\alpha\beta$,

$$K = 1 - \alpha + \beta.$$

REMARQUE. — Les données numériques que nous indiquons sont relatives à l'ellipsoïde de CLARKE (1880) :

$$\lg a = 6.80470147$$

$$\lg e^2 = 7.83273174$$

$$\lg R_0 = 6.80321907$$

$$R_0 = 6.357 \text{ km.}$$

Nous avons calculé les valeurs suivantes de $\frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}$:

φ	$\frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}$
1°	1
2°	1
3°	1
4°	1
5°	1 — 8.10 ⁻⁸
7°	1 — 25.10 ⁻⁸
9°	1 — 76.10 ⁻⁸
11°	1 — 154.10 ⁻⁸
13°	1 — 298.10 ⁻⁸
36°30	1 — 20200.10 ⁻⁸

Le tableau montre :

1° Que α est toujours positive;

2° Que la plus grande valeur de α , pour des valeurs embrassant toute l'Afrique (il est possible de démontrer pour toutes les latitudes), est de l'ordre de 2.10^{-4} , soit $\frac{1}{5.000}$.

Pour les latitudes congolaises, α ne dépasse pas 3.10^{-6} .

3° Comme β est toujours positif, nous constatons que la projection de GAUSS équatoriale ne sera pas limitée en latitude par la condition

$$K \text{ extremum} = 1 - \frac{1}{1.000}.$$

Les bornes de la carte de GAUSS s'obtiennent en X par l'équation

$$1 + \left[\frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] = 1 + \frac{1}{1.000},$$

dont une très bonne valeur des racines est

$$X^2 = \frac{2 R_0^2}{1.000} \text{ ou } X = \pm 282 \text{ km.}$$

ce qui correspond à un peu plus de $2^{\circ}30'$ de longitude à partir du méridien central.

Nous étendrons toutefois le fuseau GAUSS à 3° de longitude de part et d'autre du méridien central en ménageant des bandes de recouvrement d'au moins 1° entre fuseaux voisins. L'altération de longueur maximum ne dépassera pas, après application de la réduction de TISSOT, $\frac{1}{1460}$, ce qui reste dans l'ordre de grandeur tolérable.

Application des formules de Laborde.

A. — Les formules sont :

$$1^{\circ} \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{\partial K}{\partial y} \sin V - \frac{\partial K}{\partial x} \cos V \right] = \pm \gamma$$

ou

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dn} = \pm \gamma.$$

Le signe de la correction est déterminé sans ambiguïté, si l'on se rappelle que les transformées planes de géodésiques ouvrent leur concavité vers les K décroissants.

$$2^{\circ} c = \frac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{3}} s + \frac{1}{72} \gamma''_{\frac{1}{3}} s^3 + \dots$$

$$3^{\circ} S = \left(\frac{1}{K}\right)_{\frac{1}{2}} s + \left(\frac{1}{K}\right)''_{\frac{1}{2}} \frac{s^3}{24} + \dots$$

B. — Le rapport de similitude local de la projection de GAUSS est

$$K = \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \frac{X^6}{720 R_0^6} + \dots \right].$$

C. — CALCUL DES RÉDUCTIONS ANGULAIRES c .

Précision : celle des corrections apportées aux angles mesurés dans les triangulations primordiales, soit $0'',01$.

La détermination de la portée a fait apparaître, dans le développement de K , la partie principale : $1 + \frac{X^2}{2 R_0^2}$, que nous appelons K_a , et l'on a

$$K = K_a + \varepsilon$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} \right] \\ &= \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} \right] \left[\frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} - 1 \right] + \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] \\ &= \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \alpha \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} \right] \\ &= (1 - \alpha) \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \alpha \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} \right] \\ \varepsilon &= \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \alpha \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Les angles c seront donnés par

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dK}{dn} \right)_{\frac{1}{3}} s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{K} \cdot \frac{dK_a}{dn} \right)_{\frac{1}{3}} s + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} \frac{d\varepsilon}{dn} \right)_{\frac{1}{3}} s, \quad (1)$$

à condition de montrer que le terme $\gamma''_{\frac{1}{3}} \frac{s^3}{72}$ et les suivants sont négligeables.

Nous écrivons la relation (1)

$$c = c_1 + c_2;$$

c_1 est la correction principale;

c_2 est la correction résiduelle.

30 L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS CONFORMES

1° *Ordre de grandeur maximum de ε .*

ε peut prendre des valeurs positives et négatives.

La plus grande valeur positive s'obtient pour $\alpha = 0$ et $X = 330$ km (3° degré de longitude), soit

$$\varepsilon = \frac{\overline{330^4}}{24 \times \overline{6357^4}} = 3.10^{-7}.$$

L'ordre de grandeur de la plus grande valeur négative s'obtient pour la plus grande valeur de α , soit $\alpha = 3.10^{-6}$, si nous nous limitons aux latitudes congolaises. Nous obtiendrons l'ordre de grandeur de ε négatif maximum en négligeant

$\frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots$ devant l'unité et en écrivant

$$\varepsilon_{\max} = \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \alpha_{\max},$$

dont le maximum s'obtient par $X = 0$.

$$\varepsilon \text{ négatif max.} = 3.10^{-6}.$$

2° *Ordre de grandeur maximum de c_1 :*

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \frac{\partial K_a}{\partial X} \cos V \right]_{\frac{1}{3}} s \quad (1)$$

$$K_a = 1 + \frac{X^2}{2 R_0^2}.$$

Nous acceptons $\gamma_A'' \frac{s^3}{72} = 0$; nous le démontrerons par après.

Pour la recherche de l'ordre de grandeur de c_1 , nous acceptons $K = 1$ dans la formule (1) :

$$\frac{\partial K_a}{\partial x} = \frac{X}{R_0^2};$$

$$c_1 = \frac{s}{2} \frac{X}{R_0^2} \cos V,$$

dont le maximum a lieu pour $X = 330$ km et $\cos V = 1$:

$$(c_1)_{\max} = \frac{s}{2} \frac{330}{R_0^2}.$$

Pour un côté $s = 100$ km, on aura

$$(c_1)''_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{100 \times 330 \times 206.264}{40.000.000} = 83''.$$

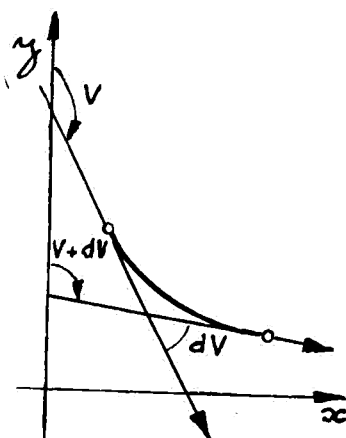
3° Pour le calcul de c_1 , on peut remplacer K par K_a .

L'erreur maximum sur K sera en effet 3.10^{-6} et il s'ensuivrait sur c_1 une erreur maximum de l'ordre de

$$(87)'' 3.10^{-6} = 0'', 000\,261.$$

4° La dérivée γ''_A et les suivantes sont négligeables.

Nous allons établir cette proposition en supposant V compris entre 0 et π . La démonstration serait la même si $\pi < V < 2\pi$.



On a

$$\frac{1}{K} \left[-\frac{\partial K}{\partial X} \cos V \right] = -\gamma,$$

où γ a le signe de y'' .

Pour fixer les signes, remarquons que

si $y'' > 0$, on a

$$\frac{dV}{ds} < 0; \quad \frac{dV}{ds} = -\gamma;$$

si $y'' < 0$, on a

$$\frac{dV}{ds} > 0; \quad \frac{dV}{ds} = -\gamma;$$

$$K = K_a = 1 + \frac{X^2}{2R_0^2};$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{X^2}{2R_0^2}\right)} \frac{X}{R_0^2} \cos V.$$

Rappelons $\frac{dX}{ds} = \sin V$:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{-\frac{X}{R_0^2}}{\left(1 + \frac{X^2}{2R_0^2}\right)^2} [\sin V \cos V] \frac{X}{R_0^2} + \frac{1}{1 + \frac{X^2}{2R_0^2}} \frac{1}{R_0^2} \sin V \cos V + \left[\frac{\frac{X}{R_0^2} \sin V}{1 + \frac{X^2}{2R_0^2}} \right] \gamma :$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\sin V}{1 + \frac{X^2}{2R_0^2}} \left[-\gamma \frac{X}{R_0^2} + \frac{\cos V}{R_0^2} + \gamma \frac{X}{R_0^2} \right] = \frac{\sin V \cos V}{R_0^2 \left(1 + \frac{X^2}{2R_0^2}\right)} = (\sin V) \frac{\gamma}{X} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{ds^2} &= -\cos V \frac{\gamma^2}{X} + \frac{\sin V}{X} \frac{d\gamma}{ds} - \frac{1}{X^2} (\sin^2 V) \gamma \\ &= -\cos V \frac{\gamma^2}{X} = -\cos^3 V \frac{X}{\left(1 + \frac{X^2}{2R_0^2}\right)^2 R_0^4}, \end{aligned}$$

dont l'ordre de grandeur maximum est $\frac{X}{R_0^4}$, ce qui conduit à une correction à c_1 de l'ordre de

$$\frac{1}{72} \cdot \frac{X}{R_0^4} s^3,$$

dont le maximum pour $X = 330$ km et $s = 100$ km serait en secondes sexagésimales :

$$\frac{330}{72} \cdot \frac{1.000.000}{(40.000.000)^2} \cdot 200.000 = \frac{1}{1600} = 0'' 0006. —$$

5° *Calcul de la correction c_1 .*

C'est la partie principale de la correction c :

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_a} \frac{\partial K_a}{\partial X} \cos V \right]_{\frac{1}{3}} s$$

$$K_a = 1 + \frac{X^2}{2R_0^2}$$

$$\frac{\partial K_a}{\partial X} = \frac{X}{R_0^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_a} \frac{X \cos V}{R_0^2} \right]_{\frac{1}{3}} s.$$

Nous avons établi que pour le calcul des angles c , on peut remplacer le gisement au premier tiers de la transformée de géodésique par le gisement de la corde rectiligne. On a donc

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_a} \frac{X}{R_0^2} \right]_{\frac{1}{3}} s \cos V.$$

Rappelons aussi que remplacer s par l , longueur de la corde rectiligne, donne une erreur relative au plus égale à $\frac{1}{40.000.000}$.

Dès lors,

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_a} \frac{X}{R_0^2} \right]_{\frac{1}{3}} l \cos V.$$

On a pour la transformée de géodésique $[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)]$:

$$X_{\frac{1}{3}} = X + \frac{X_2 - X_1}{3};$$

$$l \cos V = Y_2 - Y_1$$

et il vient

$$c_1 = \left(\frac{1}{K_a} \right)_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2 R_0^2} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1],$$

soit, en secondes sexagésimales,

$$c_1 = \left(\frac{1}{K_a} \right)_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1],$$

formule simple qui permet le calcul direct.

Nous avons calculé un tableau donnant les valeurs naturelles de $\frac{1}{(K_a)_{\frac{1}{3}} 2 R_0^2 \sin 1''}$ et les valeurs de $\text{colg} (K_a)_{\frac{1}{3}} 2 R_0^2 \sin 1''$ pour le calcul des c_1 à la machine ou par voie logarithmique. (Voir p. 42.)

On peut aisément se rendre compte que pour conserver l'approximation de $0'',01$, il faut déterminer $\frac{1}{(K_a)_{\frac{1}{3}} 2 R_0^2 \sin 1''}$ avec une erreur au plus égale à $3 \cdot 10^{-7}$. Dans cette précision, (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) doivent être connues à environ 5 mètres près, si la longueur du côté $(X_1, Y_1) (X_2, Y_2)$ est 100 km et qu'il s'oriente parallèlement à OY_2 .

HELMERT a donné un abaque pour la formule

$$c = \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1],$$

où R_0 est calculé sur l'ellipsoïde de BESSEL.

Cette formule (HELMERT) suffit pour le calcul des angles c_1 avec une erreur qui ne dépasse guère $0'',1$; les coordonnées X_1, Y_1, X_2, Y_2 doivent être connues dans ce cas à 50 m près.

Indiquons aussi que si l'on ne désire pas dépasser l'approximation de $1''$, il suffit de connaître les coordonnées rectangulaires X_1, Y_1, X_2, Y_2 à environ 500 m près.

6° Détermination de la correction résiduelle c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \frac{d\varepsilon}{dn} \right]_{\frac{1}{3}} s,$$

$$\text{où } \varepsilon = \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \alpha \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots \right];$$

c_2 se détermine par une méthode graphique du colonel LABORDE, que nous appliquons ci-dessous.

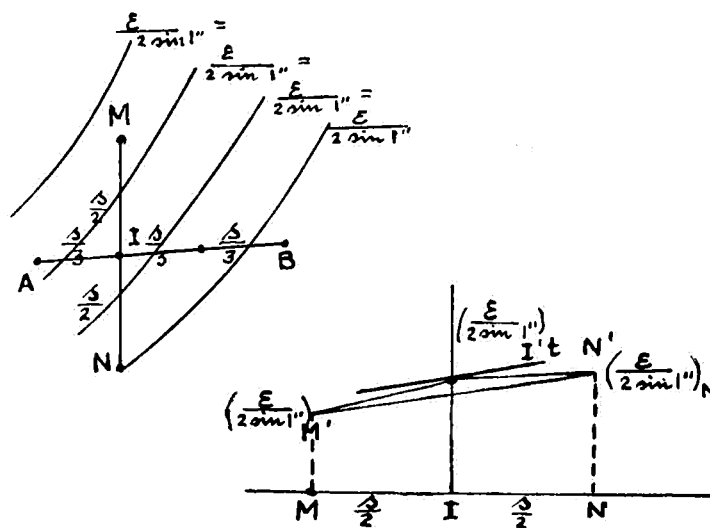
En secondes sexagésimales, on a

$$c_2 = \frac{1}{2 \sin 1''} \left[\frac{1}{K} \frac{d\varepsilon}{dn} \right]_{\frac{1}{3}} s.$$

La suite va montrer que c_2 n'atteint que quelques centièmes de seconde; dès lors, $\frac{1}{K}$ peut être pris égal à l'unité :

$$c_2 = \frac{1}{2 \sin 1''} \left(\frac{d\varepsilon}{dn} \right)_{\frac{1}{3}} s.$$

Supposons tracé sur une carte à petite échelle le réseau des équi- $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ et soit la transformée de géodésique AB; I est le premier tiers à partir de A; AB = s.



Sur MN, perpendiculaire à AB en I, portons $IM = \frac{s}{2} = IN$, de part et d'autre de I.

La courbe $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''} = f(n)$ s'obtient en faisant dans le réseau équi- $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ la coupe MIN.

Si nous supposons la corde M'N' parallèle à la tangente t au profil M'T'N' en I', on peut écrire :

$$\frac{\text{Différence des cotes } \left(\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''} \right) \text{ entre M et N}}{s} = \frac{1}{2 \sin 1''} \frac{d\varepsilon}{dn}. \text{ C'est dire que } c_2$$

s'obtient par simple lecture de la différence des cotes $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ des points M et N obtenus comme nous l'avons indiqué. Le signe de c_2 est défini comme suit : si, suivant la normale orientée, ε et K_a varient dans le même sens, c_2 est à ajouter à c_1 , à soustraire dans le cas contraire. Une plus grande précision peut facilement être obtenue en traçant par points le profil M'T'N' et en menant en I' la tangente à cette courbe; la pratique montre que cette rigueur est superflue pour l'approximation de 0'',01.

Nous avons établi que ε variait, pour toute l'étendue de la carte limitée aux latitudes congolaises, de

$$+ 3.10^{-7} \text{ à } - 3.10^{-6}.$$

Les cotes du réseau équi- $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ varieront très sensiblement :

$$\left(\frac{1}{\sin 1''} = 200.000 \right), \text{ de} \\ + \frac{3 \times 200.000}{2 \times 10^7} \text{ à } - \frac{3 \times 200.000}{2 \times 10^6} \\ + 0'', 03 \text{ à } - 0'', 30.$$

Nous indiquons ci-après comment nous avons obtenu le réseau équi- $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$:

$$\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''} = \frac{1}{2 \sin 1''} \left[\frac{X_0^4}{24 R_0^4} + \dots \right] - \frac{\alpha}{2 \sin 1''} \left[1 + \frac{X^2}{2 R_0^2} + \dots \right].$$

L'emploi du réseau $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$, pour déterminer c_2 , suppose les courbes cotées en centièmes de seconde.

$\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ comprend un terme positif et un terme négatif; si nous calculons chacun d'eux avec une erreur au plus égale à 0'',001, l'erreur de la différence n'excédera pas 0'',002 et nous obtiendrons pour $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$ le chiffre exact des centièmes de seconde.

Examinons le terme positif

$$\frac{1}{2 \sin 1''} \left[\frac{X^4}{24 R_0^4} + \frac{X^6}{720 R_0^6} + \dots \right].$$

Le terme

$$\frac{1}{2 \sin 1''} \frac{X^6}{720 R_0^6}$$

n'excède pas 0'',0000025 et nous limitons le terme positif à

$$A = \frac{1}{2 \sin 1''} \cdot \frac{X_0^4}{24 R_0^4}.$$

Nous traçons la courbe $A = f(X)$ (planche I).

Examinons le terme négatif, où la plus grande valeur de α pour les latitudes congolaises est $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$.

L'erreur maximum commise en négligeant

$$\frac{X^2}{2 R_0^2} + \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots$$

est

$$\frac{1}{750} \cdot \frac{3 \times 100.000}{1.000.000} = \frac{1}{2500} = 0'',0004.$$

Nous limitons le terme négatif à $B = \frac{\alpha}{2 \sin 1''}$.

Nous traçons la courbe $B = f(\varphi)$ ou, mieux, la courbe $B = f(Y)$, Y étant la coordonnée plane correspondant à chaque latitude φ le long de l'axe OY ($\lambda = X = 0$) (planche II).

Le réseau équi- $\frac{\epsilon}{2 \sin 1''}$ peut maintenant se tracer point par point, comme suit :

1° Remarquons qu'il suffit de tracer les équi- $\frac{\epsilon}{2 \sin 1''}$ d'un seul quadrant (par exemple le quadrant S.-E.); la symétrie donne les autres quadrants; l'échelle adoptée est le 1/5.000.000.

2° La courbe $A = f(X)$ permet de graduer l'axe OX en

$$0'' \quad 0'',005 \quad 0'',010 \quad 0'',015 \quad 0'',020 \dots$$

3° La courbe $B = f(Y)$ permet de graduer l'axe OY en

$$0'' \quad -0'',005 \quad -0'',010 \quad -0'',015 \dots 0'',175 \quad -0'',180 \dots$$

Nous traçons les parallèles (transformées) en considérant les abaissments $R_0 \sigma$ (voir théorie de la projection de GAUSS), dont une approximation suffisante

$$\text{est } R_0 \sigma = \frac{Y X^2}{2 R_0^3}.$$

Les points d'intersection de ces transformées de parallèles et des parallèles à OY donnent les cotes rondes en centièmes de seconde du réseau — $\frac{\varepsilon}{2 \sin 1''}$. Il suffit de joindre les points de même cote.

Pour supprimer les cotes négatives, nous ajoutons 0''35 à toutes les cotes. Rien ne change pour la détermination de c_2 , qui s'obtient par différences des cotes (planche III).

Remarquons que c_2 ne dépassera pas quelques centièmes de seconde; il n'en est tenu compte que dans les triangulations de haute précision, lorsqu'on désire assurer une concordance parfaite entre les éléments calculés sur l'ellipsoïde et leurs transformées sur le plan.

Calcul des altérations de longueur.

Reprenons la formule donnée par le colonel LABORDE :

$$S = \left(\frac{1}{K}\right)_{\frac{1}{2}} s + \left(\frac{1}{K}\right)_{\frac{1}{2}}'' \frac{s^3}{24} + \dots;$$

$$K = 1 + \frac{X^2}{2 R_0^2};$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{1 + \frac{X^2}{2 R_0^2}} = \frac{1 - \frac{X^2}{2 R_0^2}}{1 - \frac{X^4}{4 R_0^4}}.$$

Nous avons admis

$$\frac{X^2}{2 R_0^2} < \frac{1}{1.000} \text{ soit } \frac{X^4}{4 R_0^4} < \frac{1}{10^6}.$$

Or, $\frac{1}{10^6}$ est l'ordre de grandeur de l'erreur relative de mesure des bases de haute précision, et pour le calcul pratique de la formule du colonel LABORDE, nous acceptons

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{X^2}{2 R_0^2}.$$

Calculons les dérivées de $\frac{1}{K}$:

$$\left(\frac{1}{K}\right)' = -\frac{1}{K^2} \frac{dK}{ds}.$$

Or,

$$dX = ds \sin V$$

et

$$\left(\frac{1}{K}\right)' = -\frac{1}{K^2} \cdot \frac{dK}{dX} \sin V = -\frac{1}{K^2} \frac{X \sin V}{R_0^2}.$$

La dérivation suivante donne

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{K}\right)'' &= \left(-\frac{1}{K^2}\right)' \cdot \frac{X \sin V}{R_0^2} - \frac{1}{K^2} \frac{dX}{ds} \frac{\sin V}{R_0^2}, \\ \left(\frac{1}{K}\right)'' &= -\frac{2}{K^3} \cdot \frac{X \sin V}{R_0^2} \cdot \frac{dK}{ds} - \frac{1}{K^2} \frac{\sin^2 V}{R_0^2}, \\ \left(\frac{1}{K}\right)'' &= -\frac{2}{K^3} \frac{X \sin^2 V}{R_0^2} \cdot \frac{dK}{dX} - \frac{1}{K^2} \frac{\sin^2 V}{R_0^2}, \\ \left(\frac{1}{K}\right)'' &= -\frac{2}{K^3} \frac{X^2 \sin^2 V}{R_0^4} - \frac{1}{K^2} \frac{\sin^2 V}{R_0^2}.\end{aligned}$$

Le terme $\frac{2}{K^3} \frac{X^2 \sin^2 V}{R_0^4}$ est certainement petit. Son correspondant dans la formule de LABORDE est

$$\frac{2}{K^3} \cdot \frac{X^2 \sin^2 V}{R_0^4} \cdot \frac{s^3}{24},$$

dont la valeur maximum dans les cas extrêmes

$$\sin V = 1 \text{ et } \frac{X^2}{2 R_0^2} = \frac{1}{1.000}$$

est, en prenant $K = 1$,

$$\frac{4}{1.000} \cdot \frac{1}{R_0^4} \cdot \frac{s^3}{24} = \frac{s^3}{6.000 R_0^4},$$

que nous écrivons, pour faire apparaître l'erreur relative,

$$s \cdot \frac{s^2}{6.000 R_0^2},$$

et dont la valeur pour $s = 100$ km serait

$$s \cdot \frac{10.000}{250.000.000.000} = \frac{s}{25.000.000},$$

évidemment négligeable; et nous resterons dans l'approximation des bases de haute précision en limitant

$$\left(\frac{1}{K}\right)'' \text{ à } -\frac{1}{K^2} \frac{\sin^2 V}{R_0^2}.$$

Les dérivées suivantes de $\frac{1}{K}$ sont nulles et la formule de LABORDE devient

$$S = \left(1 - \frac{X^2}{2 R_0^2}\right)_{\frac{1}{2}} s - \frac{s^2 (\sin^2 V)_{\frac{1}{2}}}{24 K_{\frac{1}{2}}^2 R_0^2}.$$

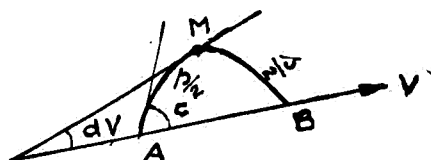
Nous avons montré antérieurement que la corde rectiligne l pouvait, pour le calcul, remplacer l'arc s . Bien que cela apparaisse évident, montrons que $K_{\frac{1}{2}}$ peut être pris égal à l'unité et que $(\sin^2 V)_{\frac{1}{2}}$ peut être égalé à $\sin^2 V$, V étant le gisement de la corde rectiligne.

La plus grande valeur de $\frac{s^2}{24 R_0^2}$ est ($s = 100$ km).

$$\frac{10.000}{24 \times 42.250.000} \sim \frac{1}{100.000};$$

$$K_{\frac{1}{2}}^2 = (1 + k)_{\frac{1}{2}}^2 = 1 + 2k$$

et la valeur maximum de k est $\frac{1}{1.000}$; donc, la valeur maximum de $K_{\frac{1}{2}}^2 = 1,002$.



Dès lors, en restant aux valeurs maxima, si nous ne faisons varier que V , nous avons

$$dS = s \cdot \frac{2 \sin V \cos V dV}{100.000},$$

et pour que $\frac{\sin 2V dV}{100.000}$ soit inférieur à $\frac{1}{10^7}$, il faut, dans le cas défavorable

$$\sin 2V = 1, \quad \frac{dV}{100.000} < \frac{1}{10^7}, \text{ soit } dV < \frac{1}{100},$$

soit, en secondes sexagésimales, $dV < 2000''$, ce qui est certain d'après tout ce qui précède [Ordre de grandeur des maxima des angles $c = 83''$ et dV (centre corde rectiligne et tangente en $\frac{s}{2}) < c$].

Finalement nous calculerons

$$S = \left(1 - \frac{X^2}{2 R_0^2}\right)_{\frac{1}{2}} s - \frac{s^2 \sin^2 V}{24 R_0^2} s,$$

et l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{10^6}$.

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) les coordonnées des extrémités d'un côté.

On a

$$S = \left[1 - \frac{\left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2}{2 R_0^2} \right] s - \frac{s^2 \sin^2 V}{24 R_0^2} s,$$

qui peut aussi s'écrire

$$S = \left[1 - \frac{\left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2}{2 R_0^2} \right] s - \frac{(X_2 - X_1)^2}{24 R_0^2} s$$

ou, de façon plus simple,

$$S = \left[1 - \frac{3(X_2 + X_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}{24 R_0^2} \right] s = \left[1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \right] s.$$

Il reste à envisager la correction résiduelle due à

$$\epsilon = K - K_a.$$

Reprenons

$$dS = \frac{ds}{K} = \frac{ds}{K_a + \epsilon} = \frac{ds}{K} - \frac{\epsilon ds}{K_a (K_a + \epsilon)};$$

$$S = \int \frac{ds}{K_a} - \int \frac{ds}{K_a} \cdot \frac{\epsilon}{K_a + \epsilon} = \int \frac{ds}{K_a} - \int \frac{ds}{K_a} \cdot \frac{\epsilon}{K}.$$

Nous avons vu que, dans toute l'étendue de la carte, soit $\varphi < 13^\circ$,

$$X < 282 \text{ km},$$

la variation de $\frac{\epsilon}{2 \sin 1''}$ atteint au maximum $0'',1$ entre les extrémités du côté, de 100 km.

La variation correspondante de ϵ est $0,1 \times 0,000005 \times 2 = 0,000001$, et dans les limites d'approximation que nous nous sommes imposées pour le calcul des altérations de longueur, nous pouvons, dans $\int \frac{ds}{K_a} \cdot \frac{\epsilon}{K}$, considérer $\frac{\epsilon}{K}$ constant et égal à sa valeur moyenne le long du côté considéré.

On a, dès lors,

$$S = \int \frac{ds}{K_a} \left[1 - \frac{\epsilon}{K} \right].$$

Notons

$$S_a = \int \frac{ds}{K_a} = \left[1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \right] s,$$

et nous aurons

$$S = S_a \left(1 - \frac{\epsilon}{K} \right).$$

Explicitons ε avec nos notations antérieures :

$$K = 1 - \alpha + \beta,$$

$$K_a = 1 + \frac{X^2}{2 R_0^2}; \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ positifs.}$$

On tire

$$K - K_a = \varepsilon = -\alpha + \beta - \frac{X^2}{2 R_0^2}.$$

Nous avons vu que

$$\beta - \frac{X^2}{2 R_0^2} = \frac{X^4}{24 R_0^4} + \dots < 2.10^{-7}$$

et nous pouvons négliger ce poste pour le calcul de

$$S = S_a \left(1 - \frac{\varepsilon}{K} \right),$$

avec une erreur relative inférieure à 10^{-6} . Il vient

$$S = S_a \left(1 + \frac{\alpha}{K} \right),$$

où, évidemment, pour le calcul de $\frac{\alpha}{K}$, nous prenons $K = 1$ et finalement

$$S = S_a (1 + \alpha).$$

Rappelons

$$-\alpha = \frac{a}{N} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} - 1 = -B \times 2 \sin 1''.$$

Modifions l'échelle des B sur la courbe représentative et nous pouvons lire α directement (planche II).

Rappelons aussi que pour toutes les latitudes comprises entre 0° et 9° , α n'atteint pas $\frac{1}{10^6}$, le maximum de α pour les latitudes extrêmes du Congo belge n'atteignant que $\frac{3}{10^3}$. C'est dire qu'une approximation grossière de Y est suffisante pour lire α sur la courbe.

Résumé des résultats obtenus.

I. ANGLES. — La formule

$$c_1 = \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1] \frac{1}{K_1}$$

permet le calcul précis des angles c_1 , correction dont il faut affecter les angles des triangles géodésiques pour obtenir les angles des triangles plans correspondants sur la projection.

L'emploi de l'abaque formé par les réseaux des équi- ε donne la correction résiduelle c_2 éventuelle.

Les signes des c_1 et c_2 sont donnés par la considération du sens de la courbure des transformées planes de géodésiques, comme nous l'avons indiqué précédemment :

- a) concavité ouverte vers les K décroissants;
- b) la normale étant orientée, si

$$K_u = 1 + \frac{X^2}{2R_0^2} \text{ et } \varepsilon,$$

dont nous possédons le réseau, varient dans cette orientation, dans le même sens, les valeurs absolues de c_1 et c_2 sont à ajouter; si K_u et ε varient en sens contraires suivant la normale orientée, la valeur absolue de c_2 est à retrancher de c_1 .

La seule connaissance des angles c_1 (corrigés éventuellement de c_2) permet le calcul direct sur la projection au départ d'un côté connu, par exemple, par les coordonnées (XY) de ses extrémités.

Nous désirons calculer le $\frac{1}{100}$ de seconde sexaségimale. On peut se rendre compte aisément que le facteur $\frac{1}{K_{\frac{1}{3}}}$ ne peut être négligé pour $X \geq 150$ km, si l'on veut calculer c à moins d'un centième de seconde près.

Nous dressons, pour le calcul pratique, un tableau qui donne le facteur

$$\frac{1}{2R_0^2 \sin 1'' K_{\frac{1}{3}}}$$

suivant l'argument $X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3}$, en valeur naturelle pour le calcul à la machine, en logarithmes pour l'emploi des tables (ellipsoïde de CLARKE 1880).

On y interpolera à vue pour l'application.

Les coordonnées doivent être connues à moins de 10 m près pour le calcul du $\frac{1}{100}$ de seconde.

$X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3}$ (en km)	$\frac{1}{2R_0^2 \sin 1'' K_{\frac{1}{3}}}$	$\text{clg } \frac{1}{2R_0^2 \sin 1'' K_{\frac{1}{3}}}$
50	0,0025524	7,40694
100	0,0025521	7,40690
150	0,0025517	7,40684
200	0,0025512	7,40674
250	0,0025505	7,40662
300	0,0025496	7,40647

II. Côtés. — La formule

$$S = s \left[1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \right] [1 + \alpha],$$

où $s = l$, l étant calculé par

$$\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} = \operatorname{tg} V,$$

$$l = \frac{X_2 - X_1}{\sin V} = \frac{Y_2 - Y_1}{\cos V},$$

permet le passage du plan à l'ellipsoïde et réciproquement avec une erreur relative inférieure à $\frac{1}{10^6}$ sur les longueurs des côtés.

Retenons que $\alpha = 0$ pour toutes les latitudes inférieures à 5° .

Indiquons

$$\left. \begin{array}{l} \lg 6 R_0^2 = 8.384\,589\,42 \\ 6 R_0^2 = 242.431.700 \end{array} \right\} \text{l'unité est le km.}$$

Exemple d'application des formules.

Nous extrayons du mémoire *Triangulation du Congo oriental*, par M. J. MAURY, ingénieur en chef au Ministère des Colonies, publié par l'Institut Royal Colonial Belge, les données suivantes relatives au quadrilatère Ilehe-Ngabua (II)-Kamohorora-Vitshumbi, situé au Sud immédiat du lac Édouard :

Vitshumbi.

$\varphi = - 0^\circ 41' 01''.254$	$X = 151.898,53 \text{ m.}$
$\lambda = - 29\,23\,17\,568$	$Y = 489.406,92 \text{ m.}$
Ilehe 4.373.1263	$11^\circ 41' 53''.49$
Kamohorora 4.414.4922	269 04 48 09
Ngabua (II) 4.511.8809	317 57 36 69

Ngabua (II).

$\varphi = - 0^\circ 54' 07''.143$	$X = 173.666,34 \text{ m.}$
$\lambda = - 29\,35\,01\,455$	$Y = 465.270,24 \text{ m.}$
Vitshumbi 4.5118809	$137^\circ 57' 26''.95$
Kamohorora 4.3963956	189 42 51 16
Ilehe 4.4210579	92 06 57 48

Kamohorora.

$\varphi = - 0^\circ 40' 47''.655$	$X = 177.867,33 \text{ m.}$
$\lambda = - 29\,37\,17\,396$	$Y = 489.825,31 \text{ m.}$
Ngabua (II) 4.3963956	$9^\circ 42' 49''.28$
Ilehe 4.5865169	52 20 18 06
Vitshumbi 4.4144922	89 04 38 10

Ilehe.

$\varphi = - 0^{\circ}53'35''.416$	$X = 147.316,22 \text{ m.}$
$\lambda = - 29 20 49 263$	$Y = 466.240,84 \text{ m.}$
Vitshumbi 4.3731263	191 11'55,53
Kamohorora 4.5865169	232 20 31 62
Ngabua (II) 4.4210579	272 07 10 83

Nous en tirons le tableau des triangles suivants, les angles étant ceux des triangles géodésiques compensés (définitifs).

Les coordonnées rectangulaires de GAUSS ont été calculées par les formules de passage de BÖHLER.

Considérant connus les éléments du côté Ilehe-Ngabua, nous allons calculer, directement sur la projection de GAUSS employée, les éléments du côté Vitshumbi-Kamohorora, en appliquant les formules indiquées par cette note.

TABLEAU DES TRIANGLES GÉODÉSIQUES.

<i>Triangle V K I.</i>				<i>Triangle V K N.</i>			
V	102°	07'	05,40	V	48°	52'	48,60
K	36	44	20 04	K	79	21	48 82
I	41	08	36 09	N	51	45	24 21
	180	00	01 53		180	00	01 63

<i>Triangle K N I.</i>				<i>Triangle V N I.</i>			
K	42°	37'	28,78	V	53°	14'	16,80
N	97	35	53 68	N	45	50	29 47
I	39	46	39 21	I	80	55	15 30
	180	00	01 67		180	00	01 57

Le calcul des angles c_1 se fait par la formule

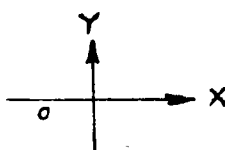
$$c_1 = \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1] \frac{1}{K_1^2}.$$

L'examen du réseau des $\text{équi-}\varepsilon$ montre que les corrections résiduelles c_2 sont négligeables.

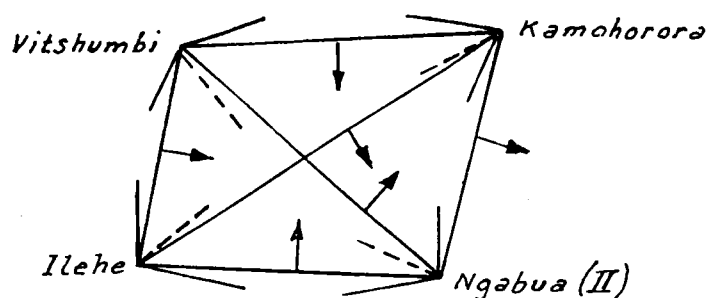
Le sens des corrections c est donné par la considération de la concavité des transformées de géodésiques, la ligne centrale de la projection étant le méridien origine ($X = 0$). Nous avons tracé sur la figure l'orientation des normales aux transformées vers les K décroissants et le sens correspondant des angles c .

Il y a lieu de rappeler que les coordonnées rectangulaires publiées ont été décalées

en X de 220 km vers l'Ouest,
en Y de 565 km vers le Sud.



Le quadrilatère considéré se situe dans le quadrant S.-W. du fuseau GAUSS, dont le 30° méridien est le méridien central.



Calcul des c du côté Ilehe-Vitshumbi.

$$X_I = 147,316 - 220 = -72,684$$

$$X_V = 151,898 - 220 = -68,102$$

$$\frac{X_I - X_V}{3} = \frac{4,582}{3} = 1,527$$

$$Y_V - Y_I = 489,407 - 466,241 = 23,166.$$

$$c_I = 0,0025523 \times [72,684 - 1,527] [23,166]$$

$$c_I = 4''2072$$

$$c_V = 0,0025523 \times [68,102 + 1,527] [23,166]$$

$$= 0,0025523 \times 69,629 \times 23,166$$

$$c_V = 4''4168.$$

Calcul des c du côté Ilehe-Kamohorora.

$$X_I = -72,684$$

$$X_K = -42,133$$

$$\frac{X_I - X_K}{3} = \frac{30,551}{3} = 10,184$$

$$Y_K - Y_I = 489,825 - 466,241 = 23,584.$$

$$c_I = 3''7621$$

$$c_K = 3''4492.$$

On trouve

Calcul des c du côté Ilehe-Ngabua.

$$\begin{aligned}
 X_I &= 72,684 \\
 X_N &= 46,334 \\
 \frac{X_I - X_N}{3} &= \frac{26,350}{3} = 8,783 \\
 Y_I - Y_N &= 466,241 - 465,270 = 0,971 \\
 c_I &= 0,0025523 [72,684 - 8,783] 0,971 \\
 &= 0,0025523 [63,901] [0,971] \\
 c_I &= 0,1584 \\
 c_N &= 0,0025524 [46,334 + 8,783] [0,971] \\
 c_N &= 0,1366.
 \end{aligned}$$

Calcul des c du côté Vitshumbi-Ngabua.

$$\begin{aligned}
 X_V &= -68,102 \\
 X_N &= -46,334 \\
 \frac{X_V - X_N}{3} &= \frac{21,768}{3} = 7,256 \\
 Y_V - Y_N &= 489,407 - 465,270 = 24,137 \\
 c_V &= 0,0025523 [68,102 - 7,256] 24,137 \\
 &= 0,0025523 \times 60,846 \times 24,137 \\
 c_N &= 0,0025524 [46,334 \times 7,256] 24,137 \\
 &= 0,0025524 [53,590] 24,137. \\
 c_V &= 3,7484 \qquad c_N = 3,3014.
 \end{aligned}$$

Calcul des c du côté Vitshumbi-Kamohorora.

$$\begin{aligned}
 X_V &= -68,102 \\
 X_K &= -42,133 \\
 \frac{X_V - X_K}{3} &= \frac{25,969}{3} = 8,656 \\
 Y_V - Y_K &= 489,825 - 489,407 = 0,418 \\
 c_V &= 0,0025523 \times 59,446 \times 0,418 \\
 c_K &= 0,0025524 \times 50,789 \times 0,418. \\
 c_V &= 0,0634 \qquad c_K = 0,0542.
 \end{aligned}$$

Calcul des c du côté Kamohorora-Ngabua.

$$\begin{aligned}
 X_N &= -46,334 \\
 X_K &= -42,133 \\
 \frac{X_N - X_K}{3} &= \frac{4,201}{3} = 1,400 \\
 Y_K - Y_N &= 489,825 - 465,270 = 24,555 \\
 c_N &= 0,0025524 \times 44,934 \times 24,555 \\
 c_K &= 0,0025524 \times 43,533 \times 24,555. \\
 c_N &= 2,8161 \qquad c_K = 2,7284.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant dresser le tableau des angles des triangles plans formés par les cordes des transformées des géodésiques formant le quadrilatère étudié.

Triangle V K I.

Angles sur ellipsoïde	Réductions C	Angles obtenus	adoptés
—	—	—	—
V = 102°07'05",40	— 4,1168 — 0,0634 — 4,1802	102°07'01",2198	01",22
K = 36 44 20,04	— 0,0542 + 3,1492 + 3,0950	36 44 23,1350	23,13
I = 41 08 36,09	+ 3,7621 — 4,2072 — 0,4451	41 08 35,6449 179 59 59,9997	35,65 00,00

Triangle K N I.

K = 42 37 28,78	— 3,1492 + 2,7284 — 0,4208	28,3592	28,36
N = 97 35 53,68	+ 2,8161 — 0,1366 + 2,6795	56,3595	56,35
I = 39 46 39,21	— 3,7621 — 0,1584 — 3,9205	35,2893 00,0080	35,29 00,00

Triangle V K N.

V = 48 52 48,60	— 0,0634 — 3,7484 — 3,8118	44,7882	44,79
K = 79 21 48,82	— 0,0542 + 2,7284 + 2,6742	51,4942	51,49
N = 51 45 24,21	+ 2,8161 — 3,3014 — 0,4853	23,7247 00,0071	23,72 00,00

Triangle VNI.

V = 53 14 16,80	— 4,4168	16,4316	16,43
	+ 3,7484		
	— 0,3684		
N = 45 50 29,47	— 0,1366	32,6348	32,63
	+ 3,3014		
	3,1648		
I = 80 55 45,30	— 0,4584	10,9344	10,94
	— 4,2072	00,0008	00,00
	— 4,3656		

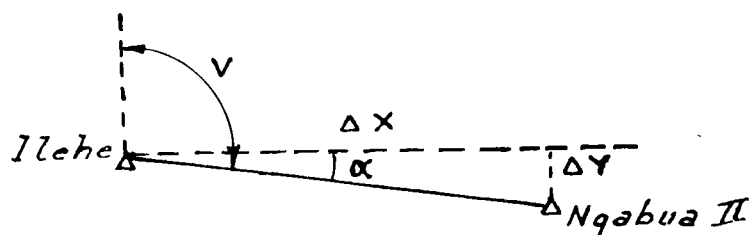
Les fermetures des triangles plans à 180° constituent des vérifications de calcul. Les écarts à 190° ne peuvent dépasser (côtés de triangle de l'ordre de 50 km) le centième de seconde; ils proviennent en ordre principal du fait que les azimuts sont publiés jusqu'au centième de seconde, dans le mémoire d'où nous extrayons les éléments du quadrilatère.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU CÔTÉ DE DÉPART.

Nous calculons ci-dessous le lg de la longueur du côté Ilehe-Ngabua sur la projection et son gisement V au départ des coordonnées des extrémités obtenues par les formules de passage BÖHLER. (Mémoire *Triangulation du Congo oriental*.)

Nous contrôlons la longueur du côté par la formule

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \cdot [z = 0],$$



$$V = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\Delta X = l \cos \alpha$$

$$\Delta Y = l \sin \alpha$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \tan \alpha$$

$$X_I = 147.316,22$$

$$X_N = 173.666,34$$

$$\Delta X = 26.350,12$$

$$Y_I = 466.240,84$$

$$Y_N = 465.270,24$$

$$\Delta Y = 970,60$$

Nous avons calculé

$$\alpha = 2^{\circ} 06' 34'',278$$

$$V = 92 \ 06' 34,28. —$$

On trouve $\lg l$ avec vérification par

$$\begin{array}{ll} \lg \Delta X = 4.4207\ 8261 & \lg \Delta Y = 2.9870\ 4028 \\ \lg \cos \alpha = 9.9997\ 0558 & \lg \sin \alpha = 8.5659\ 6324 \\ \lg l = 4.4210\ 7703 & \lg l = 4.4210\ 7704 \end{array}$$

$$\lg l = 4.4210770.$$

Indiquons, pour la vérification de l par la formule des altérations de longueur,

$$\lg 6 R_0^2 = 8.3845\ 8942$$

(CLARKE 1880), l'unité de longueur étant le km.

Nous avons trouvé

$$X_I^2 + X_N^2 + X_I X_N = 10.797,4458$$

$$1 - \frac{X_I^2 + X_N^2 + X_I X_N}{6 R_0^2} = 0,999955462,$$

$$\lg S \text{ du côté Ilehe-Ngabua (II) sur l'ellipsoïde} \dots\dots\dots = 4.4210579$$

$$\lg \left(1 - \frac{X_I^2 + X_N^2 + X_I X_N}{6 R_0^2} \right) \dots\dots\dots = 9.9999807$$

$$\lg l \text{ du côté Ilehe-Ngabua II sur la projection} \dots\dots\dots = 4.4210772$$

L'écart des unités du 7^e ordre au logarithme correspondant à 1 cm., 3 sur la longueur métrique du côté, soit $\frac{1}{10^6}$ de la longueur du côté.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES PLANS DU QUADRILATÈRE. — FORMULAIRE.

La résolution au départ du log. du côté Ilehe-Ngabua obtenu par les coordonnées rectangulaires des extrémités donne les valeurs suivantes pour les log. des côtés du quadrilatère plan :

Ilehe-Ngabua	4.4210770 (<i>connu</i>)
Ilehe-Kamohorora . . .	4.5865348
Ilehe-Vitshumbi . . .	4.3731527
Kamohorora-Ngabua . .	4.3964060
Ngabua-Vitshumbi . . .	4.5118986
Kamohorora-Vitshumbi	4.4145086

La formule des altérations de longueur a donné

$$\text{Ilehe-Ngabua } 4.4210772.$$

La résolution du quadrilatère plan au départ de ce dernier log. donne pour le côté « d'arrivée » :

$$\text{Kamohorora-Vitshumbi } 4.4145088.$$

APPLICATION DE LA FORMULE DES ALTÉRATIONS DE LONGUEUR.

Pour montrer la concordance entre le calcul sur l'ellipsoïde et le calcul direct sur la projection, nous calculons ci-dessous le log. de la longueur du côté « d'arrivée », Kamohorora-Vitshumbi, par la formule

$$\frac{S}{s} = \left[\frac{X_K^2 + X_V^2 + X_K X_V}{6 R_0^2} \right]; \quad \alpha = 0.$$

*Triangle ILEHE-NGABUA-VITSHUMBI.**Triangle ILEHE-VITSHUMBI-KAMOHORORA.*

	Logarithmes		Logarithmes
Ilehe-Ngabua	4,42107704 9,99452309	Ilehe-Vitshumbi . . .	4,37315273 9,99021493
53 14 16,43	4,41560013 9,90370161	36 44 23,14	4,36336766 9,77683290
Ngabua-Vitshumbi . . .	4,51189852 9,85577730	Ilehe-Kamohorora . .	4,58653476 9,81818874
80 55 10,94	4,36767582 9,99452309	102 07 01,22	4,40472350 9,99021493
Vitshumbi-Ilehe	4,37315273 9,90370161	Vitshumbi-Kamohorora	4,41450857 9,77683290
45 50 32,63	4,27685434 9,85577730	41 08 35,65	4,19134147 9,81818874
Vérification	4,42107704	Vérification	4,37315273

Moyenne des côtés.

Côtés	Logarithme des côtés
Ilehe-Ngabua	4,42107704
Ilehe-Kamohorora	4,58653481
Ilehe-Vitshumbi	4,37315273
Kamohorora-Ngabua . . .	4,39640597

Triangle ILEHE-NGABUA-KAMOHORORA.*Triangle* NGABUA-KAMOHORORA-VITSHUMBI.

	Logarithmes		Logarithmes
Ilehe-Ngabua	4,42107704 9,80604026	Ngabua-Kamohorora .	4,39640597 9,99247421
42 37 28,36	4,22710730 9,83071133	48 52 44,79	4,38888013 9,87698159
Ngabua-Kamohorora . .	4,39640597 9,99616914	Ngabua-Vitshumbi . .	4,51189859 9,89508434
39 46 35,29	4,39256511 9,80604026	79 21 51,49	4,40698293 9,99247421
Ilehe-Kamohorora . . .	4,58653485 9,83071133	Vitshumbi-Kamohorora	4,41450872 9,87698159
97 35 56,35	4,41724618 9,99616914	51 45 23,72	4,29149031 9,89508434
Vérification	4,42107704	Vérification	4,39640597

Moyenne des côtés.

Côtés	Logarithme des côtés
Ngabua-Vitshumbi. . .	4,51189856
Kamohorora-Vitshumbi .	4,41450864

Nous avons trouvé

$$X_K^2 + X_V^2 + X_K X_V = 9282,2548$$

$$1 - \frac{X_K^2 + X_V^2 + X_K X_V}{6 R_0^2} = 0,999961712.$$

Nous extrayons de la publication $\lg S$ (ellipsoïde) Vitshumbi-Kamohorora :

$$\lg S = 4.4144922$$

$$\lg \left[1 - \frac{X_K^2 + X_V^2 + X_K X_V}{6 R_0^2} \right] = 9.9999834$$

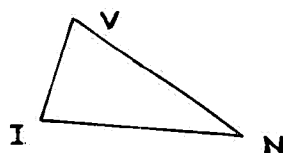
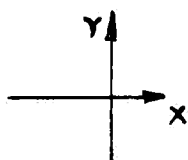
D'où, sur la projection, l Vitshumbi-Kamohorora = 4.4145088

résultat que nous avons déjà obtenu par la résolution du quadrilatère plan; la concordance est parfaite.

**CALCUL SUR LA PROJECTION DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES
DE VITSHUMBI ET DE KAMOHORORA.**

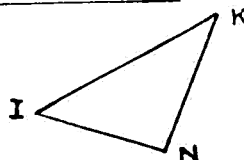
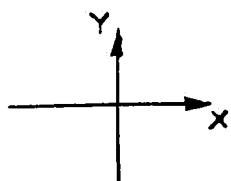
Les données sont les coordonnées rectangulaires de GAUSS publiées pour Ilehe et Ngabua (obtenues par les formules de BÖHLER). Les éléments des triangles employés sont ceux provenant de la résolution du quadrilatère plan obtenu après introduction des corrections c .

Vitshumbi



$g\ I\ N = 92^{\circ}06'34,28$		$g\ N\ I = 272^{\circ}06'34,28$	
$I = 80^{\circ}55'10,94$		$N = 45^{\circ}50'32,63$	
$g\ I\ V = 11^{\circ}11'23,34$		$317^{\circ}57'06,91$	
$I - V = 4.37315273$	$I\ V = 4.37315273$	$N\ V = 4.51189856$	$N\ V = 4.51189856$
$\sin g = \frac{9.28793603}{3.66108876}$	$\cos g = \frac{9.99166444}{4.36481717}$	$\sin g = \frac{9.82591529}{4.33781385}$	$\cos g = \frac{9.87074505}{4.38264361}$
$\Delta X = 4.582,35$	$\Delta Y = 23.164,19$	$\Delta X = 21.767,77$	$\Delta Y = 24.134,79$
$X_I = 147.316,22$	$Y_I = 466.240,84$	$X_N = 173.666,34$	$Y_N = 465.270,24$
$X_V = 151.898,57$	$Y_V = 489.405,03$	$151.898,57$	$489.405,03$

Kamohorora



$g\ I\ N = 92\ 06\ 34,28$		$g\ N\ I = 272\ 06\ 34,28$	
$I = 39\ 46\ 35,29$		$N = 97\ 35\ 56,35$	
$g\ I\ K = 52\ 19\ 58,99$		$g\ N\ K = 369\ 42\ 30,63$	
$I\ K = 4.58653481$	$I\ K = 4.58653481$	$N\ K = 4.39640597$	$N\ K = 4.39640597$
$\sin g = \frac{9.89849274}{4.48502755}$	$\cos g = \frac{9.78609135}{4.37262613}$	$\sin g = \frac{9.22694968}{3.62335565}$	$\cos g = \frac{9.99373525}{4.39014122}$
$\Delta X = 30.551,15$	$\Delta Y = 23.587,47$	$\Delta X = 4.201,03$	$\Delta Y = 24.555,07$
$X_I = 147.316,22$	$Y_I = 466.240,84$	$X_N = 173.666,34$	$Y_N = 465.270,24$
$X_K = 177.867,37$	$489.825,31$	$177.867,37$	$489.825,31$

Nous confrontons ci-dessous les résultats du calcul sur la projection et ceux du calcul des coordonnées rectangulaires par les formules de passage de BÖHLER. (Mémoire *Triangulation du Congo oriental*.)

	Projection	Formules de Böhler
Vitshumbi	X = 151.898,57	X = 151.898,53
	Y = 489.405,03	Y = 489.406,92
Kamohorora	X = 177.867,37	X = 177.867,33
	Y = 489.825,31	Y = 489.825,31

Les concordances sont bonnes.

Il y a erreur d'impression (ou de calcul) dans la coordonnée Y de Vitshumbi par la formule de BÖHLER.

Nous avons trouvé pour Y de Vitshumbi, par l'application de nos formules,

$$Y = 489.405,00.$$

*
* *

Remarques très importantes sur les concordances entre les résultats des calculs sur le plan et sur l'ellipsoïde. — La comparaison que nous venons de faire entre le calcul sur le plan et sur l'ellipsoïde montre surtout que l'application des réductions angulaires c permet d'obtenir les coordonnées rectangulaires par résolution des triangles plans. La concordance des résultats de la résolution des triangles plans et de l'application des formules de BÖHLER est bonne, sans plus. La correspondance rigoureuse plan-ellipsoïde, c'est-à-dire entre les points, les longueurs, les orientations, est-elle établie pour le quadrilatère Ilehe-Ngabua-Vitshumbi-Ngabua? Nous allons montrer que si la correspondance ponctuelle se vérifie, il n'en va pas de même entre azimuts et gisements. Le désaccord que nous allons constater a pour cause que pour le calcul du quadrilatère Ilehe-Ngabua-Vitshumbi-Kamohorora, nous avons déterminé sur le plan la base de départ par les coordonnées rectangulaires de ses deux extrémités. Cela revenait à prendre, au sens géodésique de l'expression, deux points fondamentaux.

Les erreurs proviennent :

1° du fait que sur l'ellipsoïde il n'y a pas accord rigoureux entre les coordonnées publiées λ et φ d'Ilehe et de Ngabua, la longueur du côté et son azimut; il s'agit en fait de l'imprécision des formules de PUISSANT, en usage au Service géodésique;

2° du degré d'approximation des formules de BÖHLER.

Nous allons rétablir la concordance entre l'azimut Ilehe-Ngabua et le gisement correspondant sur le plan.

Dans ce qui suit, nous abandonnons les formules de passage de BÖHLER, dont nous ignorons la précision, pour employer nos formules, où nous sommes certain de l'approximation inférieure au centimètre.

Nous avons trouvé (voir tableau de calcul) (pp. 60 et 61) :

Pour Ilehe :

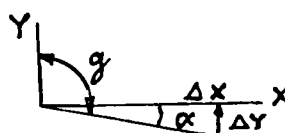
$$\begin{cases} \lambda = -29^{\circ} 20' 49'',263 \\ \varphi = -0^{\circ} 53' 35'',416 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 147.316,23 \text{ m.} \\ Y = 466.240,82 \text{ m.} \end{cases}$$

Convergence méridienne $\gamma = 36'',643$ (projection);

Pour Ngabua (II) :

$$\begin{cases} \lambda = -29^{\circ} 35' 01'',455 \\ \varphi = -0^{\circ} 54' 07'',143 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 173.666,35 \text{ m.} \\ Y = 465.270,22 \text{ m.} \end{cases}$$

Nous calculons le gisement Ilehe-Ngabua par

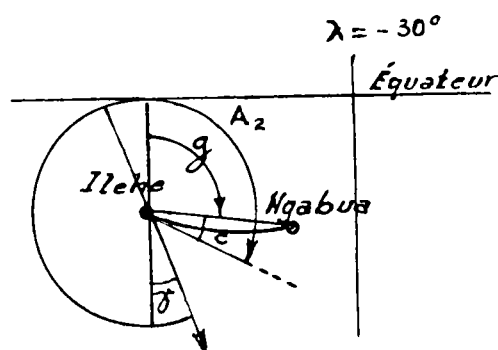


$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \operatorname{tg} \alpha \text{ et } g = 90^{\circ} + \alpha.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^{\circ} 06' 34'',28 \\ g &= 92^{\circ} 06' 34'',28. \end{aligned}$$

Faisons apparaître la discordance de ce gisement avec l'azimut correspondant $A_z = 272^{\circ}07'10'',83$, par la considération de la convergence méridienne de la projection de GAUSS : $\lambda = -30^{\circ}$.



$$\begin{aligned} g &= A_2 - 180^{\circ} - \gamma - c = 92^{\circ}07'10'',83 - 36'',643 - 0'',158 \\ &= 92^{\circ}06'34,03 \end{aligned}$$

et nous constatons que le gisement que nous avons trouvé par les coordonnées des extrémités Ilehe et Ngabua est erroné de $0'',25$. Cette divergence est inadmissible si nous désirons garder correspondance rigoureuse entre plan et ellipsoïde.

Établissons cette correspondance parfaite en ne considérant qu'un point de départ (point fondamental).

Nous choisissons Ilehe et nous recalculons par les formules de PUISSANT les coordonnées géographiques de Ngabua.

Données au point fondamental Ilehe :

$$\begin{aligned}\lambda &= -29^{\circ}20'49'',263 \\ \varphi &= -0^{\circ}53'35'',416 \\ \lg l &= 4.4210579.\end{aligned}$$

Azimut Ilehe-Ngabua : $272^{\circ}07'10'',83$.

$l = 4.4210579$		$l = 4.4210579$
$\cos \alpha = 8.56804759$		$\sin \alpha = 9.99970272$
$B = 8.51268737$		$A' = 8.50972324$
$h = 1.50179286$	$h = -31.75359$	$\sec \varphi' = 0.00005375$
$l^2 = 8.8421158$		$\delta \lambda = 2.93053761$
$\sin^2 \alpha = 9.9994051$		$\text{corr } \lg l = 123$
$c = 9.59978$		$\text{corr } \delta \lambda = 123$
$k = 8.44130$	$k = +0,02762$	$\Delta \lambda = -852,1923$
$(\delta \varphi)^2 = 3.00358$		
$D = 0.8871$		
$l = 3.8906$	$l = 0$	
$h = 1.50179$		
$l^2 \sin^2 \alpha = 8.84151$		
$E = 5.6128$	$m = +0.00009$	
$m = 5.9560$	$\Delta \varphi = -31,7259$	

$$\begin{array}{ll}\lambda \text{ Ilehe} = -29^{\circ}20'49'',2630 & \varphi \text{ Ilehe} = -0^{\circ}53'35'',4160 \\ \Delta \lambda & 14'12'',1923 \\ \lambda \text{ Ngabua} = -29^{\circ}35'01'',4553 & \Delta \varphi = 31'',7259 \\ & \varphi \text{ Ngabua} = -0^{\circ}54'07'',1419\end{array}$$

Nos formules de passage nous ont donné pour Ngabua, en coordonnées rectangulaires (p. 62) :

$$\begin{cases} X = 173.666,36 \\ Y = 465.270,25 \end{cases} \text{ pour } \begin{cases} \varphi = -0^{\circ}54'07'',1419 \\ \lambda = -29^{\circ}35'01'',4553. \end{cases}$$

On en tire par

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Y}{\Delta X} &= \alpha \text{ et } g = 90 + \alpha, \\ g &= 92^{\circ}06'34'',04\end{aligned}$$

et cette fois le gisement s'accorde avec l'azimut correspondant.

Nous concluons : au moment où l'on désire introduire les coordonnées rectangulaires, *on ne peut pas* déterminer une base de départ par la transformation des coordonnées de ses deux extrémités.

Il faut transformer en XY un seul point fondamental.

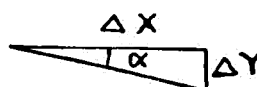
Les coordonnées géographiques à publier pour la seconde extrémité de la base sont celles issues directement de la longueur et de l'azimut de cette base.

Il convient de vérifier le gisement de la base par la considération de la convergence méridienne au point fondamental. A ce sujet, la formule que nous avons donnée pour le calcul de la convergence méridienne est à employer de préférence à celle de BÖHLER, beaucoup moins précise.

Calculons maintenant le quadrilatère au départ de Ilehe-Ngabua, défini comme ci-dessus.

ÉLÉMENTS DE ILEHE-NGABUA.

$X_I = 147.316,23$	$Y_I = 466.240,82$
$X_N = 173.666,36$	$Y_N = 465.270,25$
<u>26.350,13</u>	<u>970,57</u>



$$V = 92^{\circ} 06' 34'',04$$

$\lg \Delta X = 4.4207\ 8277$	$\lg \Delta Y = 2.9870\ 2688 -$
$\lg \cos \alpha = 9.9997\ 0561$	$\lg \sin \alpha = 8.5659\ 4963 -$
$\lg l = 4.4210\ 7716$	$\lg l = 4.4210\ 7725$
$\lg l = 4.4210\ 7721.$	

La formule des altérations de longueur a donné le même résultat (4.4210772, p. 49).

LONGUEUR DES CÔTÉS DU QUADRILATÈRE SUR LA PROJECTION CALCULÉE PAR LES TRIANGLES PLANS.

Ilehe-Ngabua	4.42107721
Ilehe-Kamohorora . .	4.58653498
Ilehe-Vitshumbi . . .	4.37315290
Kamohorora-Ngabua .	4.39640614
Ngabua-Vitshumbi . .	4.51189873
Kamohorora-Vitshumbi	4.41450884

Remarquons que le côté d'arrivée Kamohorora a exactement la valeur calculée par la formule des altérations de longueur (4.4145088, p. 51).

Conclusions.

Nous disposons donc d'un système de projection conforme permettant tous calculs de triangulation sans rien perdre de la précision des mesures.

Les réductions angulaires donnent aisément le centième de seconde exact; les altérations de longueurs sont plus petites que $\frac{1}{1000}$ et nous pouvons les réduire facilement au $\frac{1}{2000}$; ces altérations de longueurs sont par ailleurs calculables de façon simple et précise, pour ne laisser qu'une erreur relative de l'ordre du millionième.

L'outil est excellent; il nous reste à envisager ses conditions d'emploi.

1. Calcul des réductions angulaires c .

La formule que nous avons indiquée :

$$c = \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right] [Y_2 - Y_1] \frac{1}{K_{\frac{1}{3}}}$$

permet *presque toujours* de garder pour les angles sur le plan la précision de $0'',01$. Cette précision n'est évidemment pas souvent nécessaire (elle est d'ailleurs le plus souvent illusoire), mais nous voulons montrer ci-après que si l'on calcule une triangulation (un ensemble de points, de façon plus générale) directement sur la projection, il est *nécessaire de toujours réduire les angles mesurés, quel que soit l'ordre de la triangulation*.

Les formules de réductions se simplifient au fur et à mesure que l'ordre augmente, c'est-à-dire généralement au fur et à mesure que les « côtés » deviennent plus courts.

Examinons les précisions qui classent les ordres successifs des points géodésiques.

M. l'Ingénieur en chef MAURY (*Topographie*, 3^e vol.) rappelle que l'Association géodésique internationale caractérise les triangulations de 1^{er} ordre comme suit : « triangulation dans laquelle la moyenne des erreurs de fermeture ne dépasse pas $1''$ sexagésimale et dans laquelle très peu de ces valeurs atteignent $3''$ ». Et M. MAURY ajoute : « Pour les triangulations de 2^e ordre, la moyenne est portée à $5''$ et à $10''$ pour les triangulations du 3^e ordre et à $1'$ pour le 4^e ordre ».

- a) 1^{er} ordre. Soient n l'erreur moyenne de fermeture,
 ε l'erreur moyenne d'un angle.

On sait que $\varepsilon = \frac{n}{5.2}$,
 soit pour le 1^{er} ordre $\varepsilon = \frac{1''}{5.2} = 0''20$.

Les formules rigoureuses pour le calcul des réductions c s'imposent si l'on désire garder une correspondance parfaite entre les éléments des figures sur l'ellipsoïde et sur le plan. On fera le calcul des coordonnées géographiques et des coordonnées rectangulaires.

On sait que la longueur moyenne des côtés est de 40 km.

b) 2^e ordre. $\varepsilon = \frac{5''}{5.2} = 1''$; longueur moyenne des côtés = 20 km.

α) La correspondance rigoureuse ellipsoïde-plan exige les formules complètes de c ; on calcule les coordonnées géographiques et rectangulaires.

β) Si le calcul est conduit uniquement en coordonnées rectangulaires, les c sont calculées par

$$c = 0,00255 \left(X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right) (Y_2 - Y_1).$$

Les $X Y$ sont mesurés à 100 m près et exprimés en km. L'erreur ne dépassera guère $0'',15$, soit pour un angle $0'',30$, négligeable devant ε , erreur moyenne de l'angle mesuré.

c) 3^e ordre. $\varepsilon = \frac{10''}{5.2} = 2''$; longueur moyenne des côtés = 10 km.

Le calcul est conduit uniquement en coordonnées rectangulaires; c est calculé par

$$\frac{1}{400} \left(X_1 + \frac{X_2 - X_1}{3} \right) (Y_2 - Y_1);$$

X et Y sont mesurés à 100 m près et exprimés en km.

L'erreur ne dépassera pas $0'',6$, négligeable devant $\varepsilon = 2''$.

Il est, je crois, utile de montrer qu'il ne peut être question de négliger c purement et simplement.

En effet, à une distance moyenne $X = 150$ km, pour $Y_2 - Y_1 = 10$ km, c vaut $\frac{1500}{400} = 4''$, soit le double de l'erreur moyenne de la mesure de l'angle.

d) 4^e ordre. $\varepsilon = \frac{60''}{5.2} = 12''$; dimension moyenne des mailles 1 à 2 km, mais il arrivera fréquemment que certains côtés aient 10 km.

$$C = \frac{1}{400} [X_{\text{moyen}}] [Y_2 - Y_1],$$

les $X Y$ sont mesurés au km près et exprimés en km. L'erreur ne dépassera pas $3''$ pour l'angle.

Mais on ne peut pas toujours négliger c , dont la valeur, aux bords de la carte, peut devenir

$$C = \frac{1}{400} \times 300 \times 10 = \frac{300}{400} = 7''5.$$

Pour ces angles dont les côtés seraient orientés suivant des gisements de 45° et de 135° à l'extrémité de la carte, les angles c , qui s'ajoutent, vaudraient

$$C = \frac{1}{400} \times 300 \times \frac{10}{\sqrt{2}} \sim 5''$$

et l'on commettrait une erreur de $10''$ sur l'angle. Pour un X_{moyen} de 150 km, l'erreur sur l'angle serait encore $5''$.

Remarquons d'ailleurs que les réductions c en 4^e ordre peuvent se calculer à vue sans aucun effort; il serait, à mon avis, coupable de les négliger.

c) 5^e ordre éventuel. $\varepsilon = 12''$, comme pour le 4^e ordre; les mailles se resserrent à 500 m, ce qui est bien utile pour la coordination des mesurages cadastraux.

Lorsque la longueur des visées l'indique, les mêmes réserves que pour le 4^e ordre sont d'application.

2. Corrections des altérations de longueur de la projection.

$$S = s \left[1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \right] [1 + \alpha]$$

S sur l'ellipsoïde, s sur le plan.

a) La formule complète ne s'emploie que pour l'intégration dans un réseau calculé sur le plan d'une base de précision.

b) Dans les rattachements cadastraux, il ne faut jamais perdre de vue que les mesures directes doivent être réduites à la projection aussi bien qu'à la surface de référence. On emploiera ($6 R_0^2 = 242.431.700$, l'unité étant le km).

$$S = \left(1 - \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{250.000.000} \right) s$$

sous la forme inverse

$$s = S \left[1 + \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{250.000.000} \right]$$

ou, plus simplement,

$$s = S \left[1 + \frac{3 X_{\text{moyen}}^2}{250.000.000} \right] = S \left[1 + \frac{X_{\text{moyen}}^2}{80.000.000} \right].$$

Convergence méridienne en ILEHE

$$\begin{aligned}
\lg (\lambda)'' &= 3.371204 \\
\lg \cos \varphi' &= 9.999948 \\
\text{clg } \sqrt{1-e^2} &= 0.001482 \\
\lg \text{tg } \varphi' &= 8.191361 \\
v(\lambda \cos \varphi') &= \frac{19}{1.564018} \\
\lg \gamma &= 1.564018 \\
\gamma &= 36.643.
\end{aligned}$$

FORMULES

pour le
calcul des coordonnées rectilignes
dans la projection conforme de GAUSS.

(Ellipsoïde de Clarke, 1880.)

$$\varphi' = \varphi + 2h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1 \quad (\text{Table II})$$

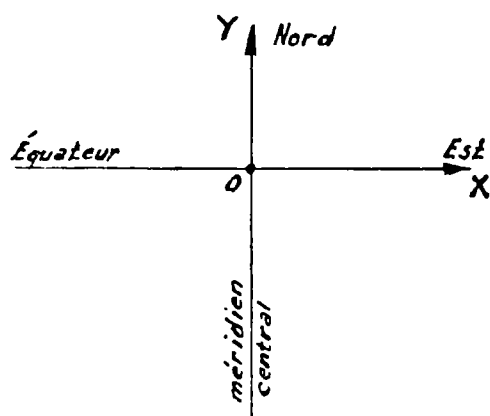
$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1-e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 \sin 1''] + \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Table IV})$$

$$(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$$

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}.$$

X et Y se rapportent aux axes.



Méridien central 30° E. G.

Log sin 1'' Appellation	4,68557487 ILEHE
λ	29°20'49,263
$(\lambda)''$	2350,737
φ	0°53'35,416
$(\varphi)''$	0°53'24,4620
$\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}$	4,68705727
$\lg \cos \varphi'$	9,99994760
$\lg (\lambda)''$	3,37120406
C_1	0
$\lg x'$	8,05820893
$\lg a \sqrt{1-e^2}$	6,80321907
$\lg \sin 1'' - S(x')$	947
C_2	0
$\lg X$	4,86143747
X	72.683,77
X_0	220.000,00
X définitif	147.316,23
$\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''$	5,013395
$\lg \text{tg } \varphi'$	8,191365
$\lg x'^2$	6,116418
C_3	24
$\lg (\sigma)''$	9,321202
$(\sigma)''$	0 2095
$(\varphi')''$	3204,4620
$(y')''$	3204,6715
$\lg (y')''$	3,50578352
$\lg a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}$	1,48879394
$\lg Y$	4,99457746
Y	98.759,18
Y_0	565.000,00
Y définitif	466.240,82

REMARQUE. — Si l'on adopte le fuseau de Gauss couvrant 6° de longitude et toutes les latitudes congolaises, il conviendra, pour maintenir les X et Y positifs, de décaler l'origine de 400 km vers l'Ouest et de 1.600 km vers le Sud (X_0 , Y_0).

FORMULES

pour le
calcul des coordonnées rectilignes
dans la projection conforme de GAUSS.

(Ellipsoïde de Clarke 1880.)

$$\varphi' = \varphi + 2h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1 \quad (\text{Table II})$$

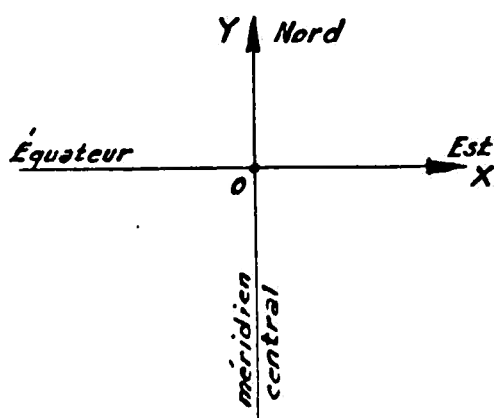
$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1 - e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(\varphi)}] + C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 \sin 1''] + \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Table IV})$$

$$(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$$

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}.$$

X et Y se rapportent aux axes.



Méridien central 30° E. G.

Log sin 1'' Appellation	4,68555787 NGABUA (II)
λ	29°35'01",455
$(\lambda)''$	1498",545
φ	0°54'07",143
φ'	0°53'56",0810
$\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}$	4,68705727
$\lg \cos \varphi'$	9,99994655
$\lg (\lambda)''$	3,17566978
C_1	0
$\lg x'$	7,86267360
$\lg a \sqrt{1 - e^2}$	6,80321907
$\lg \sin 1'' - S(x')$	385
C_2	0
$\lg X$	4,66589652
X	46.333,65
X_0	220.000,00
X définitif	173.666,35
$\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''$	5,013395
$\lg \text{tg } \varphi'$	8,195630
$\lg x'^2$	5,725347
C_3	9
$\lg (\sigma)''$	8,934381
$(\sigma)''$	0",0860
$(\varphi')''$	3236",081
$(y')''$	3236",1670
$\lg (y')''$	3,51003094
$\lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}$	1,48879394
$\lg Y$	4,99882488
Y	99.729,78
Y_0	565.000,00
Y définitif	465.270,22

REMARQUE. — Si l'on adopte le fuseau de Gauss couvrant 6° de longitude et toutes les latitudes congolaises, il conviendra, pour maintenir les X et Y positifs, de décaler l'origine de 400 km vers l'Ouest et de 1.600 km vers le Sud (X_0 , Y_0).

FORMULES

pour le

calcul des coordonnées rectilignes
dans la projection conforme de GAUSS.

(Ellipsoïde de Clarke 1880.)

$$\varphi' = \varphi + 2h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1 \quad (\text{Table II})$$

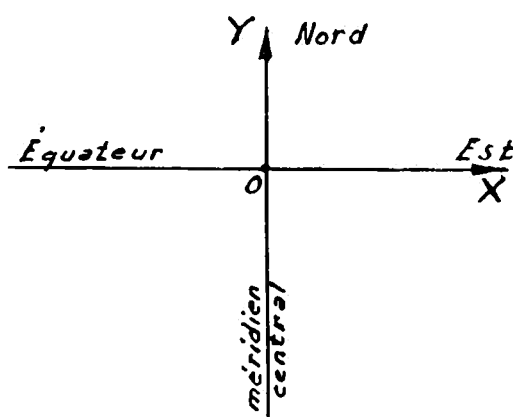
$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1-e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(\varphi')}] + C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 \sin 1''] + \lg \tan \varphi' + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Table IV})$$

$$(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$$

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}.$$

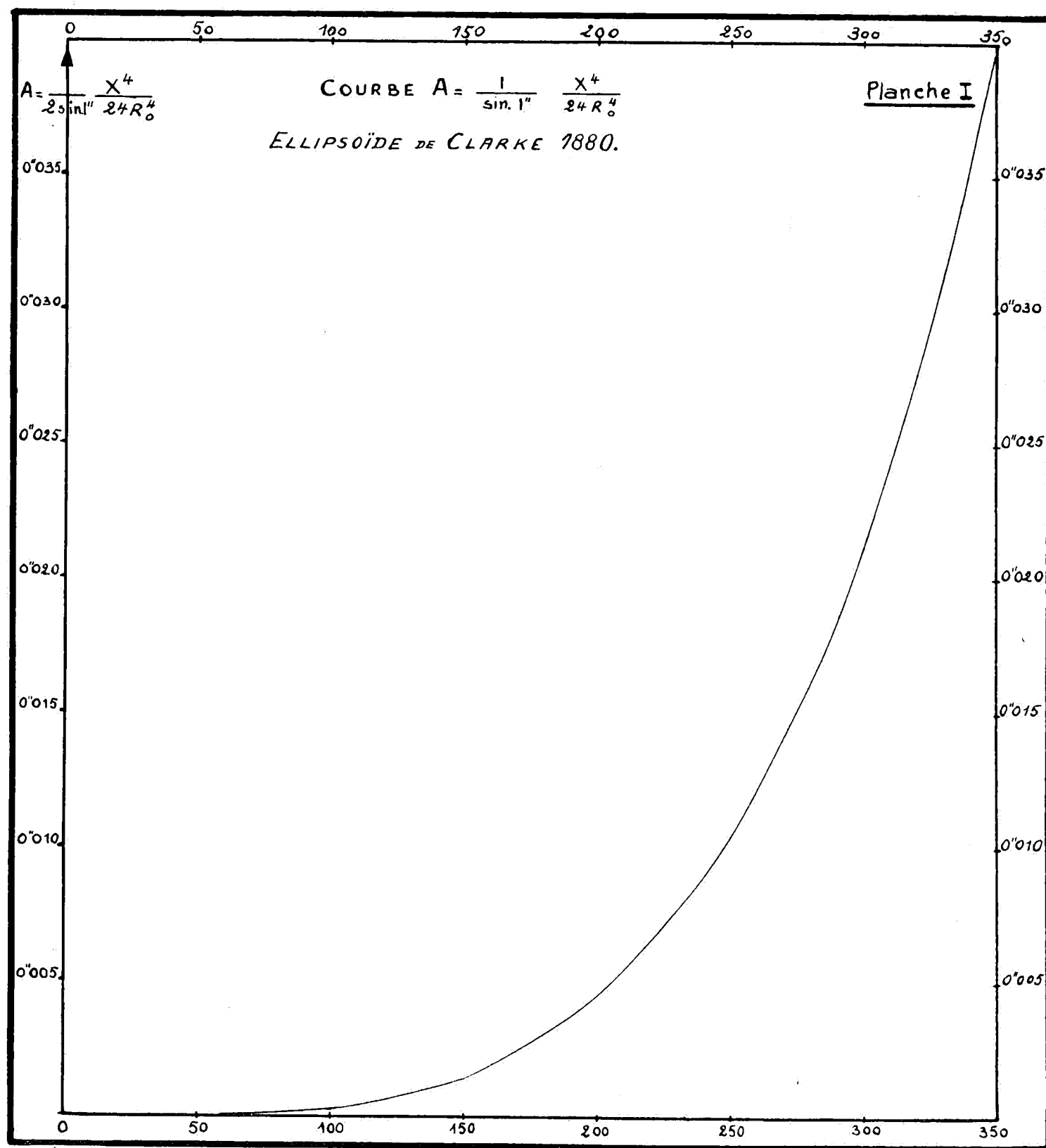
X et Y se rapportent aux axes.

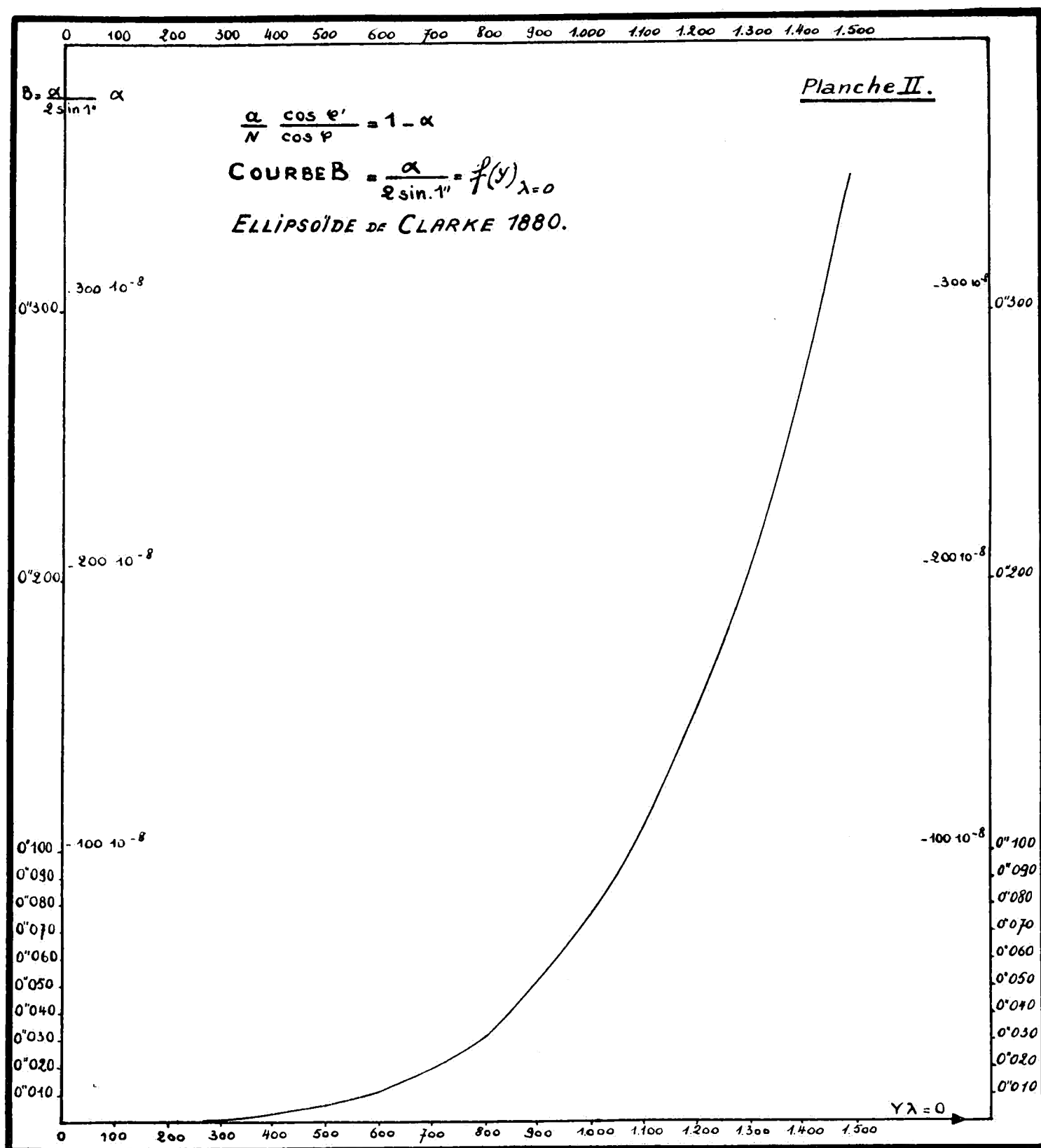


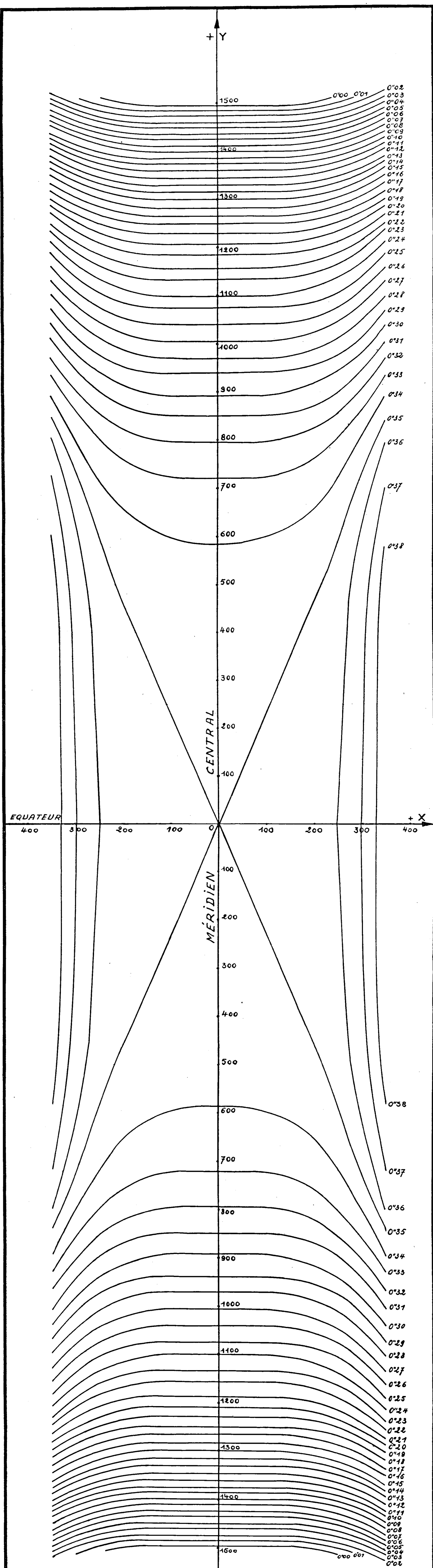
Méridien central 30° E. G.

Log sin 1'' Appellation	4.68557487 NGABUA (II)
λ	29°35'01,4553
$(\lambda)''$	1498,5447
φ	0°54'07,1419
φ'	0°53'56,0799
$\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}$	4.68705727
$\lg \cos \varphi'$	9,99994655
$\lg (\lambda)''$	3,17566969
C_1	0
$\lg x'$	7,86267351
$\lg a \sqrt{1-e^2}$	6.80321907
$\lg \sin 1'' - S(x')$	385
C_2	0
$\lg X$	4,66589643
X	46.333,64
X_0	220.000,00
X définitif	173.666,36
$\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''$	5.013395
$\lg \tan \varphi'$	8,195630
$\lg x'^2$	5,725347
C_3	9
$\lg (\sigma)''$	8,934381
$(\sigma)''$	0,0860
$(\varphi')''$	3236,079
$(y')''$	3236,1659
$\lg (y')''$	3,51003079
$\lg a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}$	1,48879394
$\lg Y$	4,99882473
Y	99.729,75
Y_0	565.000,00
Y définitif	465.270.25

REMARQUE. — Si l'on adopte le fuseau de Gauss couvrant 6° de longitude et toutes les latitudes congolaises, il conviendra, pour maintenir les X et Y positifs, de décaler l'origine de 400 km vers l'Ouest et de 1.600 km vers le Sud (X_0 , Y_0).







PROJECTION GAUSS.

RESERU DES ÉQUI- $\frac{\epsilon}{2 \sin. 1''}$

CALCUL DES REDUCTIONS ANGULAIRES RÉSIDUELLES.

Echelle 1/5.000.000

c) Un cas d'application de la formule

$$S = s \left[1 - \frac{X_{\text{moyen}}^2}{80.000.000} \right]$$

est le calcul du nivellement trigonométrique lorsque les cotes ne sont connues que sur le plan.

On trouve pour

$X_{\text{moyen}} = 100 \text{ km}$	$\lg S = \lg s - 5.10^{-5}$
$X_{\text{moyen}} = 200 \text{ km}$	$\lg S = \lg s - 2.10^{-4}$
$X_{\text{moyen}} = 300 \text{ km}$	$\lg S = \lg s - 5.10^{-4}$

Les corrections sont du même ordre et de sens contraire à la correction due à l'altitude du point de station.

CORRESPONDANCE DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES ET DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES DE LA PROJECTION CONFORME DE GAUSS POUR LE CONGO BELGE.

OBJET DE LA NOTE. — Nous nous proposons d'établir les lois de correspondance entre les coordonnées géographiques (latitude φ et longitude λ) sur un ellipsoïde déterminé (CLARKE 1880) et les coordonnées cartésiennes rectangulaires de la représentation plane conforme de GAUSS. Nous indiquerons une méthode pratique pour le calcul de ces formules.

Nous empruntons largement, quant au fond, au *Traité de Géodésie* du capitaine TARDI, du Service géographique de l'Armée française. (Gauthier-Villars, Paris, 1934.)

PROJECTION CONFORME DE GAUSS. — La projection de GAUSS consiste essentiellement en deux opérations successives :

- a) une représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère;
- b) ayant fait choix d'un méridien central sur cette sphère, on considère ce méridien comme l'équateur d'un système MERCATOR.

La projection MERCATOR est conforme. Cette seconde opération donne donc une représentation conforme de l'ellipsoïde sur le plan.

PLAN DE LA NOTE. — Nous exposerons successivement :

- 1° la conception d'une projection conforme;
- 2° le système MERCATOR de représentation conforme de la sphère sur un plan;

- 3° le système MERCATOR de représentation conforme de l'ellipsoïde sur un plan;
- 4° la représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère;
- 5° le système de représentation plane conforme de GAUSS appliqué au Congo belge;
- 6° les formules pratiques de calcul des coordonnées rectangulaires de GAUSS pour le Congo belge, les tables pour ce calcul et un exemple d'application;
- 7° un projet d'emploi de fuseaux GAUSS de 6° d'amplitude en longitude, en remplacement des fuseaux de 3° d'amplitude actuellement utilisés;
- 8° l'étude de la convergence méridienne γ dans la projection GAUSS;
- 9° le calcul inverse; déterminer λ et φ , connaissant X et Y ;
- 10° les formules pour le calcul à la machine.

1. CONCEPTION D'UNE PROJECTION CONFORME.

Considérons deux surfaces correspondantes, point à point, avec la condition que les angles entre directions correspondantes soient conservés (égaux). Chaque surface est une projection conforme de l'autre.

Soient, sur les deux surfaces, les points correspondants O et O_1 . En O , dans le plan tangent à la surface, considérons un cercle infiniment petit et les deux rayons OA et OB .

Au triangle OAB correspond, sur la seconde surface, le triangle $O_1A_1B_1$, A et B ayant A_1 et B_1 comme correspondants.

La condition de conformité impose la similitude des triangles OAB et $O_1A_1B_1$; il s'ensuit $O_1A_1 = O_1B_1$; les rayons OA et OB étant quelconques, on conclut que si la correspondance de deux surfaces conserve les angles, à un cercle infiniment petit de l'une (dans le plan tangent) correspond un cercle infiniment petit sur l'autre.

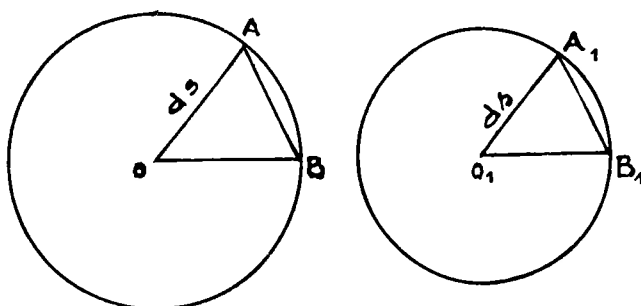
Cette condition géométrique peut se traduire analytiquement. dS étant le rayon d'un cercle infiniment petit de centre O , sur une surface; ds étant le rayon du cercle infiniment petit de centre O , sur la seconde surface, on a $KdS = ds$, les directions dS et ds étant correspondantes. K est caractéristique de O et O_1 . Cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance des deux surfaces soit conforme.

Nous avons démontré que la condition est nécessaire.

Elle est suffisante. En effet, considérons les points correspondants O et O_1 , le cercle infiniment petit dans le plan tangent en O à la première surface, les points A et B sur la circonférence de ce cercle, $OA = OB = dS$. La relation $KdS = ds$ impose que les points A_1 et B_1 correspondants de A et de B soient sur la circonférence de cercle O_1 et de rayon $K \times OA = K \times OB$.

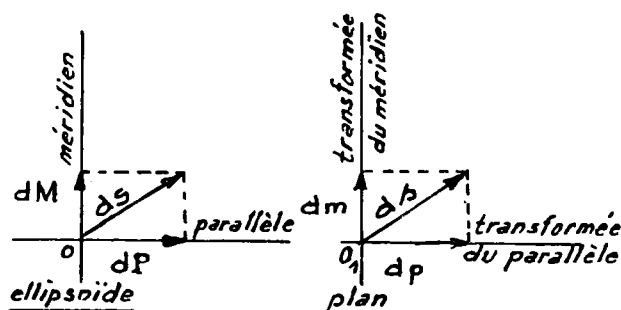
La même relation $K dS = ds$ appliquée aux points correspondants A et A₁ (ou B et B₁) donne $K \times AB = A_1B_1$.

Les triangles OAB et O₁A₁B₁ ont leurs trois côtés proportionnels; ils sont semblables. Les angles sont donc conservés. La condition $K dS = ds$ est donc suffisante.



Énonçons la condition nécessaire et suffisante $K dS = ds$ pour que la correspondance des surfaces soit une projection conforme dans le cas particulier de la représentation plane de la surface de référence (ellipsoïde ou sphère).

Nous rapportons les dS et ds correspondants aux axes rectangulaires habituellement utilisés en cartographie : les tangentes au méridien et au parallèle au point considéré sur la surface de référence et les tangentes aux transformées de ces deux lignes au point correspondant sur le plan.



On a, par projection et par définition, en notant dM et dP , dm et dp , les éléments correspondants :

$$\begin{aligned} K dP &= dp, \\ K dM &= dm. \end{aligned}$$

Et la condition nécessaire et suffisante pour que la représentation plane soit conforme est que l'on ait pour chaque couple de points correspondants :

$$\frac{dM}{dP} = \frac{dm}{dp}.$$

Nous appellerons K le rapport de similitude local.

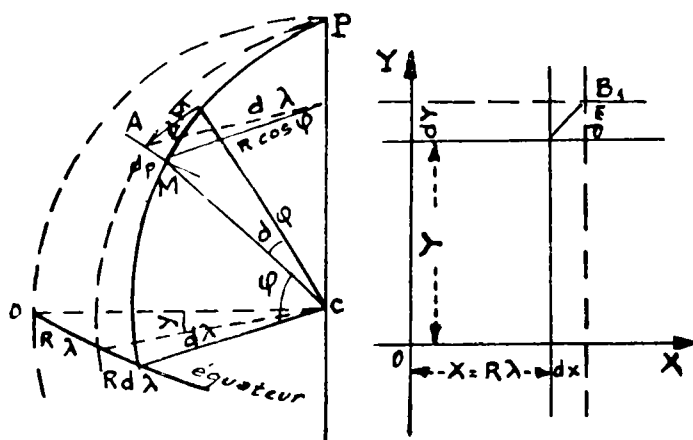
2. PROJECTION DE MERCATOR. —

REPRÉSENTATION CONFORME D'UNE SPHÈRE SUR UN PLAN.

C'est le système des cartes marines imaginé par MERCATOR-GÉRARD DE CREMER, né à Rupelmonde en 1512, mort en 1594.

On représente l'équateur par une droite qui sera l'axe des X. Le choix d'un méridien central donne l'origine O. Ce méridien se représente par la droite OY, perpendiculaire à OX. On dirige les axes OX et OY.

L'équateur se présente en vraie grandeur; les méridiens équidistants de la sphère sont représentés par des droites équidistantes, parallèles à OY.



Les parallèles sont représentés par des droites parallèles à OX, dont nous allons déterminer les positions pour que la projection soit conforme.

Soit $A(\lambda, \varphi)$ un point de la sphère. R est le rayon.

L'élément dP de parallèle en A vaut $dP = R \cos \varphi d\lambda$.

L'élément dp sur le plan, en A_1 correspondant de A , sera, d'après les définitions ci-dessus, $dp = dX = R d\lambda$.

On a donc

$$\frac{dP}{dp} = \cos \varphi.$$

La projection sera conforme si

$$\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dm} = \cos \varphi.$$

Sur la sphère $dM = R d\varphi$; sur la projection $dm = dY$.

La condition pour que la projection soit conforme est dès lors

$$dy = \frac{R d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Par intégration, on obtient les lois de correspondance

$$\begin{aligned} X &= R\lambda, \\ Y &= \int_0^\varphi \frac{R d\varphi}{\cos \varphi} = R \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \end{aligned}$$

les constantes étant nulles dans le système équatorial que nous avons défini.

On a évidemment $K = \frac{1}{\cos \varphi}$.

3. REPRÉSENTATION CONFORME DE L'ELLIPSOÏDE SUR LE PLAN.

Rappelons les notations habituelles de l'ellipse méridienne :

Grand axe = a ;

Petit axe = b ;

Excentricité = e ; $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$;

Grande normale $N = AN = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$;

Rayon de courbure en A :

$$f = AC = N^3 \frac{1 - e^2}{a^2};$$

N et f sont les rayons de courbure principaux en un point de l'ellipsoïde.

Appliquons les mêmes définitions que dans le cas de la sphère traité au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} dP &= N \cos \varphi d\lambda, \\ dp &= dX = a d\lambda. \end{aligned}$$

On tire

$$\frac{dP}{dp} = \frac{N \cos \varphi}{a}.$$

On a, sur l'ellipsoïde, $dM = \int d\varphi$;

Sur le plan : $dm = dY$.

La projection sera conforme si

$$\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dm} = \frac{N \cos \varphi}{a} = \frac{\int d\varphi}{dy}.$$

La valeur $t = -\frac{1}{e}$ donne $B = \frac{1}{2} \frac{e^2}{e^2 - 1}$.

Le remplacement donne

$$Y = a \int_0^t \left[\frac{-e^2}{2(1-et)} - \frac{e^2}{2(1+et)} + \frac{1}{1-t^2} \right] dt;$$

et, en reprenant la variable φ ,

$$Y = a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{ae}{2} \int_0^\varphi \left[\frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right] d\varphi$$

et, les constantes étant nulles dans le système équatorial que nous avons défini,

$$Y = a \left[\log_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \log_e \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right].$$

Nous complétons les formules de cette projection conforme par le rapport de similitude local

$$K = \frac{a}{N \cos \varphi}.$$

4. REPRÉSENTATION CONFORME DE L'ELLIPSOÏDE SUR UNE SPHÈRE.

Imaginons même représentation *plane*, conforme, d'un ellipsoïde et d'une sphère, selon les formules de passage que nous venons d'indiquer. L'identification de ces formules de passage donne immédiatement les lois de correspondance de la sphère et de l'ellipsoïde, la représentation restant conforme. Nous étudions ci-dessous une représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère de courbure moyenne en un point de l'équateur.

Le rayon de cette sphère est

$$R = [\sqrt{f} N]_{\varphi=0} = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Si nous notons avec indice les éléments sur la sphère, l'identification des formules de passage sphère et ellipsoïde-plan donne

$$X = a \sqrt{1 - e^2} \lambda' = a \lambda;$$

$$Y = a \sqrt{1 - e^2} \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) = a \left[\lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \lg_e \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right],$$

qui sont les lois de correspondance d'une représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère choisie.

La relation entre logarithmes reste valable quelle que soit la base; nous calculerons avec les logarithmes vulgaires.

Le rapport de similitude local ellipsoïde-sphère se trouve aussi par l'intermédiaire de la représentation plane; on a

$$K = \frac{a \cos \varphi'}{N \cos \varphi}.$$

Pour un calcul aisé et précis de φ' départ de φ , nous faisons apparaître la différence $\varphi' - \varphi$.

Posons

$$x + h = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

Il s'ensuit $\varphi' - \varphi = 2h$.

$$\lg \operatorname{tg} (x + h) - \lg \operatorname{tg} x = A.$$

Si nous notons

$$A = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \lg \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right] - \frac{e}{2\sqrt{1 - e^2}} \lg \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi},$$

il y a symétrie par rapport à l'équateur; dans ce qui suit, nous ne considérons que les valeurs absolues de φ' et de φ . Ces formules permettent le calcul de $\varphi' = f(\varphi)$; nous en donnons une méthode pratique ci-après.

Développons $\lg \operatorname{tg} x$ suivant TAYLOR.

Les trois premières dérivées sont

$$\begin{aligned} \frac{d \lg \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{2M}{\sin 2x}; & M &= 0,43429... \\ \frac{d^2 \lg \operatorname{tg} x}{dx^2} &= \frac{-4M \cos 2x}{\sin^2 2x}; \\ \frac{d^3 \lg \operatorname{tg} x}{dx^3} &= \frac{8M [2 - \sin^2 2x]}{\sin^3 2x}. \end{aligned}$$

Le développement de TAYLOR s'écrit, en faisant usage de la forme de LAGRANGE pour le reste (R_L) :

$$\lg \operatorname{tg} (x + h) - \lg \operatorname{tg} x = \frac{2Mh}{\sin x} - \frac{4M \cos 2x}{\sin^2 2x} \frac{h^2}{2} + \frac{8M [2 - \sin^2 2(x + \theta h)]}{\sin^3 2(x + \theta h)} \frac{h^3}{3!}$$

où $0 < \theta < 1$.

Revenons à la notation φ par

$$2x = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin 2x = \cos \varphi$$

$$\cos 2x = -\sin \varphi$$

$$A = \frac{2Mh}{\cos \varphi} + \frac{2M \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} h^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{M [2 - \cos^2 (\varphi + 2\theta h)]}{\cos^3 (\varphi + 2\theta h)} \right] h^3.$$

Pour l'examen des approximations de calcul nous nous limitons à la cartographie congolaise, soit $0 < \varphi < 13^\circ$.

L'étude analytique des fonctions $A = f(\varphi)$ et $h = f(\varphi)$ a montré que dans l'intervalle $0 < \varphi < 13^\circ$, A est négative ainsi que la différence $\varphi' - \varphi = 2h$.

Dans le même intervalle les fonctions A et h de la variable φ décroissent pour φ croissante.

Nous allons montrer que nous pouvons négliger le reste R_L et calculer h par l'équation du deuxième degré :

$$A = \frac{2Mh}{\cos \varphi} + \frac{2M \operatorname{tg} \varphi h^2}{\cos \varphi}.$$

Un premier calcul a donné les résultats (CLARKE 1880) :

$$\begin{aligned} A_{13^\circ} &= -0,00032716539 \\ h_{13^\circ} &= -75'',7075 \\ 2h_{13^\circ} &= -151'',4150. \end{aligned}$$

La valeur absolue du reste R_L est croissante avec φ . Sa valeur maximum est donc, dans l'intervalle considéré, celle donnée par $\varphi = 13^\circ$. Nous aurons le cas le plus défavorable en faisant $\theta = 0$, puisque h est négative.

En unité radian,

$$\begin{aligned} h_{13^\circ} &= -0,000367 \\ \frac{4}{3} M h_{13^\circ}^3 &= -0,000000000028 \\ \frac{2 - \cos^2 13^\circ}{\cos^3 13^\circ} &= 1,16 \\ [R_L]_{\varphi=13^\circ} &= -0,000000000033. \end{aligned}$$

R_L est l'erreur que nous commettons sur A en calculant h par

$$A = \frac{2Mh}{\cos \varphi} + \frac{2M \operatorname{tg} \varphi h^2}{\cos \varphi},$$

équation à deux racines négatives, dont seule la plus petite en valeur absolue convient.

Cette racine est

$$h = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2A \sin \varphi}{M}}}{2 \operatorname{tg} \varphi}.$$

Nous développons $\sqrt{1 + \frac{2A \sin \varphi}{M}}$ par la formule du binôme et nous calcu-

lons l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur h en nous arrêtant au deuxième terme :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{2 A \sin \varphi}{M}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{2 A \sin \varphi}{M} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{4 A^2 \sin^2 \varphi}{M^2} \\ &= 1 + \frac{A \sin \varphi}{M} - \frac{A^2 \sin^2 \varphi}{2 M^2}.\end{aligned}$$

L'erreur maximum commise sur h est (ordre de grandeur)

$$\begin{aligned}\varepsilon_h &= \left[\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) 8 A^3 \sin^3 \varphi}{2 \times 3 \times 2 \operatorname{tg} \varphi \times M^3} \right]_{\varphi=13^\circ}; \\ \varepsilon_h &= \left\{ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \left[\frac{A^3 \sin^3 \varphi}{2 M^3} \right] \right\}_{\varphi=13^\circ}.\end{aligned}$$

On trouve $\varepsilon_h = 0,000000000004$, soit environ $\varepsilon_h = 0'',000001$.

Nous arrêtons, en toute sécurité, le développement de $\sqrt{1 + \frac{2 A \sin \varphi}{M}}$ au deuxième terme et nous écrivons la racine h :

$$h = \frac{-1 + 1 + \frac{A \sin \varphi}{M} - \frac{A^2 \sin^2 \varphi}{2 M^2}}{2 \operatorname{tg} \varphi}$$

ou

$$h = \frac{A \cos \varphi}{2 M} \left[1 - \frac{A \sin \varphi}{2 M} \right],$$

et en secondes sexagésimales :

$$h = \frac{A \cos \varphi}{2 M \sin 1''} \left[1 - \frac{A \sin \varphi}{2 M} \right].$$

Justifions maintenant le fait de négliger R_L . Nous avons montré que négliger R_L c'est commettre une erreur maximum sur A , égale à $0,000000000033$.

Pour le calcul de l'erreur sur h , nous nous contentons de la bonne approximation $h = \frac{A \cos \varphi}{2 M}$.

$$\varepsilon_{\max} \text{ sur } h = \frac{\varepsilon_{\max} A \times 0,97}{0,87} = 1,12 \varepsilon_{\max} \text{ sur } A.$$

Négliger R_L conduit donc à une erreur sur h :

$$\varepsilon_h = 0,000000000004,$$

soit, en secondes sexagésimales, $\varepsilon_h = 0'',00001$.

Les calculs géodésiques ne sont jamais poussés à cette approximation.

Résumons les résultats obtenus. La représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère de courbure moyenne en un point de l'équateur se traduit — au moins dans l'intervalle $0 < \varphi < 13$ — par les relations

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}}; \\ \varphi' &= \varphi + 2h; \\ (h'') &= \frac{A \cos \varphi}{2 M \sin 1''} \left[1 - \frac{A \sin \varphi}{2 M} \right]; \\ A &= \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}} \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2 \sqrt{1-e^2}} \lg \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}.\end{aligned}$$

5. LE SYSTÈME DE REPRÉSENTATION PLANE CONFORME DE GAUSS APPLIQUÉ AU CONGO BELGE.

Deux opérations distinctes la caractérisent :

a) Représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère de courbure moyenne en un point de l'équateur ($R = a \sqrt{1-e^2}$). C'est le problème traité au paragraphe précédent. La solution donne les coordonnées λ' et φ' en fonction de λ et φ .

b) Faire choix d'un méridien central sur la sphère choisie ($R = a \sqrt{1-e^2}$). Considérer ce méridien central comme l'équateur d'un système MERCATOR. Ce système MERCATOR orthogonal est la projection de GAUSS.

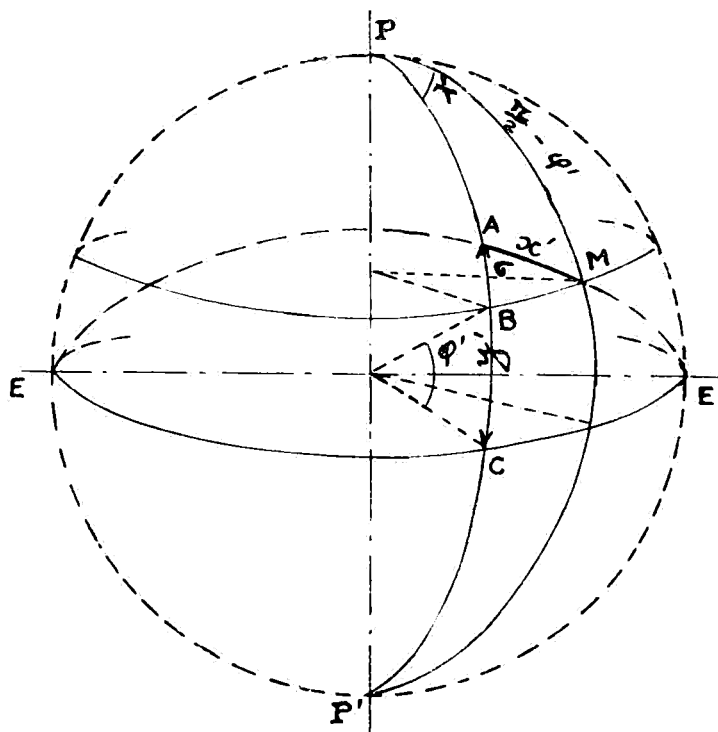
Nous en indiquons ci-après les formules analytiques.

Dessin. Le méridien central est PAP'. Il est perpendiculaire au plan du papier PE'P'E. PAP' devient l'équateur d'un système MERCATOR orthogonal; EE' en serait la ligne des pôles. Soit le point M($\lambda' \varphi'$); ses coordonnées pour le système MERCATOR orthogonal sont AM = x' , remplaçant la latitude; AC = y' , remplaçant la longitude.

Nous notons $y' = \varphi' + \sigma$.

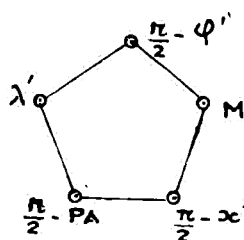
Nous comptons les longitudes (λ') à partir du méridien central.

Appliquons la règle de MAUDUIT au triangle PAM, rectangulaire en A. (Il faudra se souvenir par la suite que P est le pôle le plus rapproché.)



On a

$$\begin{aligned}\sin x' &= \sin \lambda' \cos \varphi'; \\ \sin PA &= \operatorname{ctg} \lambda' \operatorname{tg} x'; \\ \sin \varphi' &= \cos PA \cos x'\end{aligned}$$



Pour exprimer σ , remarquons que

$$\begin{aligned}\sigma &= PM - PA; \\ \sin \sigma &= \sin PM \cos PA - \cos PM \sin PA \\ &= \cos \varphi' \frac{\sin \varphi'}{\cos x'} - \sin \varphi' \operatorname{ctg} \lambda' \operatorname{tg} x',\end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \left[\frac{\cos \varphi'}{\sin x'} - \operatorname{ctg} \lambda' \right],$$

ou encore

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \left[\frac{1}{\sin \lambda'} - \operatorname{ctg} \lambda' \right];$$

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \left[\frac{1 - \cos \lambda'}{\sin \lambda'} \right];$$

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}.$$

En résumé, les coordonnées du point $M(\lambda' \varphi')$ sur la projection **MERCATOR**, dont le méridien central devient l'équateur, sont données par

$$\begin{aligned} \sin x' &= \sin \lambda' \cos \varphi'; \\ \sin \sigma &= \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}; \\ y' &= \varphi' + \sigma. \end{aligned}$$

Les formules de la projection de **MERCATOR** indiquées antérieurement donnent les coordonnées rectangulaires planes

$$\begin{aligned} X &= a \sqrt{1 - e^2} \operatorname{lg}_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right); \\ Y &= a \sqrt{1 - e^2} y'. \end{aligned}$$

ce sont les coordonnées de **GAUSS**.

Finalement, la représentation conforme de **GAUSS** que nous considérons se calcule par les formules

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad (1)$$

$$\varphi' = \varphi + 2h; \quad (2)$$

$$(h)'' = \frac{A \cos \varphi}{2 M \sin 1''} \left[1 - \frac{A \sin \varphi}{2 M} \right]; \quad (3)$$

$$A = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2 \sqrt{1 - e^2}} \operatorname{lg} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}; \quad (4)$$

$$\sin x' = \cos \varphi' \sin \lambda'; \quad (5)$$

$$X = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{M} \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right); \quad (6)$$

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}; \quad (7)$$

$$y' = \varphi' + \sigma; \quad (8)$$

$$Y = a \sqrt{1 - e^2} y'. \quad (9)$$

6. FORMULES PRATIQUES
DE CALCUL DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES DE GAUSS
POUR LE CONGO BELGE.
TABLES POUR LE CALCUL. EXEMPLE D'APPLICATION.

A. — PASSAGE À LA SPHÈRE OU CALCUL DE λ' ET φ' .

Notons d'abord que λ et λ' sont comptés à partir du méridien central.

Le calcul de A se fera par la formule transformée que nous indiquons ci-après.

On a

$$\lg \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} = \lg (1 + e \sin \varphi) - \lg (1 - e \sin \varphi).$$

En développant les postes du second membre en série, on trouve

$$\lg \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} = 2 M [e \sin \varphi + \frac{1}{3} e^3 \sin^3 \varphi + \frac{1}{5} e^5 \sin^5 \varphi + \dots]$$

et en substituant les valeurs numériques (CLARKE 1880), on obtient

$$A = 0,0034192015 \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 0,0029648205 \sin \varphi - 0,0000067466991 \sin^3 \varphi.$$

On peut établir par différentiation de la formule donnant h , que si l'on désire calculer h avec une erreur au plus égale à $0'',0001$, il convient de calculer A avec une erreur inférieure à une demi-unité du neuvième ordre décimal près. Ceci justifie d'arrêter le développement de A au terme en $\sin^3 \varphi$.

On peut maintenant calculer la table $h = f(\varphi)$.

B. — CALCUL DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

a) Les formules pratiques de calcul que nous allons indiquer donnent les coordonnées X et Y dans l'approximation du cm. Cette précision suppose évidemment la connaissance des coordonnées λ , φ de départ avec la même approximation, soit $0'',001$ ou, dans le système sexagésimal, $0'',0003$. Le calcul par logarithmes doit employer la table à 8 décimales.

b) Les coordonnées géographiques du réseau congolais sont publiées jusqu'au millième de seconde sexagésimale ($0'',001 = 3$ cm).

On peut, en se référant aux calculs des approximations donnés dans l'introduction de la table à 7 décimales de SCHRÖN (Paris, Gauthier-Villars), en usage au Service géodésique et cartographique de la Colonie, se rendre compte que l'emploi judicieux de cette table permet le calcul des coordonnées X et Y avec une erreur maximum d'environ 3 cm.

c) Nous considérons des fuseaux GAUSS limités à 3° de longitude de part et d'autre du méridien central et à 13° de latitude de part et d'autre de l'équateur.

d) *Calcul de x'* [λ, λ', x' sont de petits angles]. — L'équation (5), traduite en logarithmes, donne

$$\lg \sin x' = \lg (x')'' + S_{(x')} = \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda')'' + S_{(\lambda')},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\lg (x') - \lg \sin 1'' + S_{(x')} = \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda')'' - \lg \sqrt{1 - e^2} + S_{(\lambda')},$$

et, finalement,

$$\lg (x') = \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda')'' + [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}] + S_{(\lambda')} - S_{(x')}.$$

Nous calculons le terme numérique

$$[\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}]$$

une fois pour toutes; on a, sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880,

$$\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2} = 4,68705727 - 10.$$

Nous notons $C_1 = S_{(\lambda')} - S_{(x')}$ et nous calculons une table des C_1 .

Remarquons que C_1 est toujours négative, et dans le calcul pratique, nous ferons usage de la notation cologarithme; par exemple, $C_1 = -0,00000372$ s'écrit, dans les colonnes de calcul, $C_1 = +9,99999628$.

Nous allons calculer $C_1 = S_{(\lambda')} - S_{(x')}$ avec une erreur inférieure à l'unité du 8^e ordre (logarithmes).

On peut voir (dans la table de SCHÖN, par exemple) que la plus grande variation de S est 37 unités du 8^e ordre, pour $10''$; dès lors, nous pouvons commettre sur $[(x')'' - (\lambda')'']$ une erreur ε telle que $\frac{\varepsilon \times 37}{10} < 1$ unité du 8^e ordre; soit $\varepsilon < 0'',27$.

Nous établissons ci-après que nous obtiendrons cette approximation en calculant la différence $(x')'' - (\lambda')''$ par

$$(x')'' = (\lambda')'' \cos \varphi',$$

que nous écrivons

$$(x')'' - (\lambda')'' = -2 (\lambda')'' \sin^2 \frac{\varphi'}{2}.$$

L'équation (5) développée s'écrit

$$\sin x' = x' - \frac{x'^3}{6} + \frac{x'^5}{120} - \dots = \cos \varphi' \left[\lambda' - \frac{\lambda'^3}{6} + \frac{\lambda'^5}{120} - \dots \right]$$

Il apparaîtra par la suite que les termes $\frac{x'^3}{120}$, $\frac{\lambda'^3}{120}$ et les suivants sont négligeables. Il reste

$$x' - \frac{x'^3}{6} = \cos \varphi' \left[\lambda' - \frac{\lambda'^3}{6} \right],$$

où x' et λ' sont exprimés en radians.

Il vient, en transformant $\cos \varphi' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi'}{2}$ et en notant

$$\begin{aligned} (x')'' \sin 1'' &= x'; \\ (x')'' - (\lambda')'' &= -2 (\lambda')'' \sin^2 \frac{\varphi'}{2} + \frac{\left[\frac{x'^3}{6} - \frac{\lambda'^3}{6} + 2 \frac{\lambda'^3}{6} \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right]}{\sin 1''} \end{aligned}$$

et il nous suffit de vérifier

$$R = \frac{\left[\frac{x'^3}{6} - \frac{\lambda'^3}{6} + 2 \frac{\lambda'^3}{6} \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right]}{\sin 1''} < [0'', 27].$$

L'expression est évidemment maximum aux bords de la carte et nous introduisons les valeurs $\lambda' = 3^\circ$ et $\varphi' = 13^\circ$.

On trouve

$$R = - \frac{0,00000114}{\sin 1''} = -0'',24.$$

Nous pouvons conclure que pour le calcul de $S_{(x')} - S_{(\lambda')}$, on peut accepter

$$(x')'' - (\lambda')'' = -2 (\lambda')'' \sin^2 \frac{\varphi'}{2}.$$

On a vérifié, en calculant R , que les termes en x'^5 , λ'^5 et les suivants sont négligeables.

Nous calculons maintenant une table $(x')'' - (\lambda')''$ par la formule suivante :

On a

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}},$$

soit, sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880,

$$\lambda' = 1,00342 \lambda$$

et

$$(x')'' - (\lambda')'' = -2,00684 (\lambda')'' \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \text{ (page 97).}$$

L'emploi des tables S (SCHRÖN) permet maintenant de remplacer chaque chiffre de la table $(x')'' - (\lambda')''$ par la valeur correspondante $S_{(x')} - S_{(\lambda')}$, et nous obtenons la table C_1 (p. 98).

Indiquons un exemple d'interpolation dans la table C_1 .

Soit à calculer $C_1 = f(\lambda, \varphi')$ pour

$$\lambda = 1^{\circ}27'49'',228$$

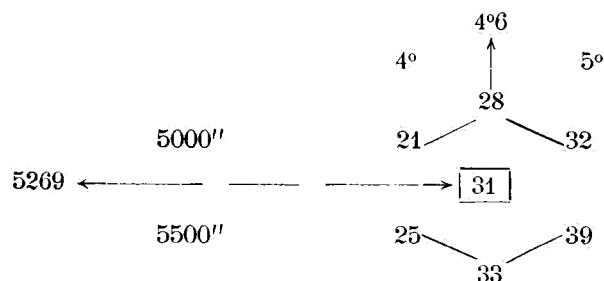
$$\varphi' = 4^{\circ}35'23,722.$$

On tire

$$(\lambda)'' = 5269'',228$$

$$(\varphi') = 4^{\circ},59.$$

La table donne à vue



L'interpolation calculée donnerait

$$\text{pour } 5000'' \quad 21 + 11 \times 0,59 = 27,49;$$

$$\text{pour } 5500'' \quad 25 + 14 \times 0,59 = 33,26;$$

$$C_1 = 27,49 + \frac{[33,26 - 27,49] 269}{500} = 30,60 = 31.$$

e) *Calcul de la coordonnée X.* — On a trouvé

$$X = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{M} \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right) = a \sqrt{1-e^2} \int_0^{x'} \frac{dx'}{\cos x'}.$$

Développons $\frac{1}{\cos x'}$:

$$X = a \sqrt{1-e^2} \int_0^{x'} dx' \left[1 + \frac{x'^2}{2} + \frac{5x'^4}{24} + 61 \frac{x'^6}{720} \dots \right]$$

et, par intégration, on a

$$X = a \sqrt{1-e^2} \left[x' + \frac{x'^3}{6} + \frac{x'^5}{24} + \frac{61}{5040} x'^7 + \dots \right]$$

Le passage aux logarithmes donne

$$\lg X = \lg a \sqrt{1-e^2} + \lg x' + \lg \left[1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} + \dots \right]$$

L'approximation exigée est l'unité du 8^e ordre logarithmique.

Nous calculerons

$$\lg \left(1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} + \dots \right),$$

avec cette précision, en négligeant les puissances supérieures à x'^4 .

En effet, la valeur maximum $x' = 0,05$ (radian) donne

$$x'^6 = 0,0000000156.$$

On a, par la série logarithmique :

$$\lg \left[1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right] = M \left[\frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right] - \frac{M}{2} \left[\frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right]^2,$$

ce qui peut s'écrire, dans l'approximation recherchée :

$$\begin{aligned} \lg \left[1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right] &= M \left[\frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} - \frac{1}{2} \frac{x'^4}{36} \right] \\ &= \frac{M x'^2}{6} + \frac{M x'^4}{36}, \end{aligned}$$

dont le calcul direct pourrait être entrepris, x' étant déjà connu.

Nous croyons plus facile de procéder comme suit pour le calcul de

$$\lg \left[1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right] = \frac{M x'^2}{6} + \frac{M x'^4}{36} \dots$$

Le développement de $\log \sin x'$ est

$$\log \sin x' = \log x' - \frac{M x'^2}{6} - \frac{M x'^4}{180} \dots$$

Si nous négligeons les puissances supérieures à x'^4 , on a

$$\frac{M x'^2}{6} = \lg x' - \lg \sin x' - \frac{M x'^4}{180}.$$

En remplaçant, on écrit

$$\begin{aligned} \lg \left(1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right) &= \lg x' - \lg \sin x' - \frac{M x'^4}{180} + \frac{M x'^4}{36} \\ &= \lg x' - \lg \sin x' + \frac{M x'^4}{45}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \lg \left(1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right) &= \lg (x')'' + \lg \sin 1'' - \lg \sin x' + \frac{M x'^4}{45} \\ &= [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + \frac{M x'^4}{45}. \end{aligned}$$

Pour l'interpolation dans la table S, on prend comme argument $\lg \sin x'$, que nous assimilons à $\lg x'$, déjà calculé. Nous justifions ci-après cette façon de faire, par la considération du cas extrême, x' voisin de 3° .

Supposons que nous ayons trouvé

$$\lg x' = 8.71852334,$$

que nous acceptons comme première approximation de $\lg \sin x'$, en nous rappelant que

$$\lg \sin x' = \lg x' - [\lg \sin 1'' - S_{(x')}].$$

La table S (SCHRÖN, par exemple) indique

$$\begin{array}{lll} S = 4.68537678 & \lg \sin 8.71839823 & \\ D = 37 & & D = 40.000 \\ S = 4.68537641 & \lg \sin 8.71880018 & \end{array}$$

Interpolons l'argument 8.71852334; on trouve

$$S_{(x')} = 4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8}$$

et nous obtenons une deuxième approximation de $\lg \sin x'$ par la correction

$$\lg \sin x' - \lg x' = \left[4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8} \right] - \lg \sin 1'',$$

et la valeur de deuxième approximation de $S_{(x')}$ sera

$$S_{(x')} = \left[4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8} \right] + \left[\frac{\lg \sin 1'' - (4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8})}{400000} \right] 37,$$

en notant le terme correctif en unités du 8^e ordre

Étudions le terme correctif

$$\frac{\left[\lg \sin 1'' - (4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8}) \right] 37}{400000}$$

Il vaut

$$\left[19.809 + \frac{12 \times 37}{40} \right] \frac{37}{400000} \sim \frac{3,7}{2} + \frac{410}{40.000} = 1,8$$

unités du 8^e ordre.

Il n'est pas négligeable, mais une correction de 1,8 unité du 8^e ordre sur $\lg \sin x'$ donnerait une correction sur $S(x')$ de $\frac{1,8 \times 37}{40.000}$, qui, elle, est négligeable.

Nous resterons donc dans l'approximation de l'unité du 8^e ordre en prenant le $S_{(x')}$ de seconde approximation. Le terme $\lg \sin 1'' - S_{(x')}$ s'écrit donc

$$\lg \sin 1'' - \left[4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8} \right] - \frac{\left[\lg \sin 1'' - (4.68537678 - \frac{12 \times 37}{40} 10^{-8}) \right] 37}{400000}$$

dont la forme

$$\lg \sin 1'' - S_{(x')} = A - \frac{A \times 37}{400000}$$

permet le calcul rapide.

Calculons maintenant

$$\frac{M x'^4}{45} = \frac{0.4343}{35} x'^4 \sim 0.01 x'^4.$$

Reprenons

$$x' = \lambda' \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right)$$

et rappelons que l'erreur maximum sur $(x' - \lambda')$ est $0,25 \sin 1'' = 0,0000012$ radian. L'erreur sur la différence des quatrièmes puissances est évidemment négligeable et la formule simplifiée

$$x' = \lambda' \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right)$$

est valable pour le calcul de ces quatrièmes puissances.

A la valeur extrême $\varphi' = 13^\circ$, on a

$$x' = \lambda' (1 - 0,02) = 1,0034 \times 0,98 \lambda;$$

$$x'^4 = 1,0136 \times 0,92 \lambda^4;$$

$$\frac{M x'^4}{45} = [1 + 0,01][1 - 0,08] \frac{M \lambda^4}{45} = (1 - 0,07) \frac{M \lambda^4}{45}.$$

L'erreur maximum commise en confondant x' et λ est ($\lambda = 3^\circ$)

$$\frac{7 \times 745}{10.000} \sim \frac{1}{2} \text{ unité du 8^e ordre.}$$

Nous établissons une table $C_2 = \frac{M \lambda^4}{45}$ et nous confondons x' et λ .

C_2 est positive; remarquons qu'il n'y a lieu d'en tenir compte que si $\lambda > 1^\circ 30'$.

f) *Calcul de la coordonnée Y.* — On a

$$\sin \sigma = \sin \varphi \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2},$$

soit, en logarithmes,

$$\log \sin \sigma = \lg \sin \varphi' + \lg (x')'' + T(x') + \lg \left(\frac{\lambda'}{2} \right)'' + T \left(\frac{\lambda'}{2} \right).$$

Les plus grandes valeurs de σ seront obtenues par $\lambda' \sim 3^\circ$ et $\varphi' \sim 13^\circ$; c'est environ $\sigma = 61''$, ... ce qui nous montre que pour rester sous l'approximation de un cm, soit $0'',0003$, il faut, dans le cas le plus défavorable, calculer σ avec 6 chiffres significatifs.

Le calcul habituel de $\log \sin \sigma$ par

$$\lg \sin \sigma = \lg (\sigma)'' + S_{(\sigma)}$$

peut, dans le cas qui nous occupe, se faire par

$$\lg \sin \sigma = \lg (\sigma)'' + \sin 1'',$$

puisque

$$S_{(\sigma=61'')} = 4,68557486$$

et

$$\lg \sin 1'' = 4,68557487.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lg \lg x' &= \lg x' + \frac{M x'^2}{3} + \frac{7 M x'^4}{90} + \dots \\ &= \lg (x')'' + \lg \sin 1'' + \frac{M x'^2}{3} + \frac{7 M x'^4}{90} + \dots \end{aligned}$$

et nous tirons

$$T_{(x')} = \lg \sin 1'' + \frac{M x'^2}{3} + \frac{7 M x'^4}{90} + \dots$$

Nous conduisons le calcul de σ avec 6 décimales (logarithmes); or la valeur maximum de $\frac{7 M x'^4}{90}$ est 0,2 unité du 6^e ordre.

Nous négligeons ce poste et il reste

$$T_{(x')} = \lg \sin 1'' + \frac{M x'^2}{3}.$$

On aura de même

$$T\left(\frac{\lambda'}{2}\right) = \lg \sin 1'' + \frac{M \lambda'^2}{12}.$$

Par remplacement, il vient

$$\begin{aligned} \lg (\sigma)'' &= \lg \sin \varphi' + \lg (x')'' + \lg (\lambda')'' + 2 \lg \sin 1'' + \frac{M x'^2}{3} + \frac{M \lambda'^2}{12} - \lg 2 - \lg \sin 1'' \\ &= \lg \sin \varphi' + \lg (x') + \lg (\lambda') + \frac{M x'^2}{3} + \frac{M \lambda'^2}{12} + [\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1'']. \end{aligned}$$

Rappelons que $(x')'' = (\lambda')'' \cos \varphi'$ ne laisse que $0'',25$ d'erreur maximum sur la différence $(x')'' - (\lambda')''$. Si nous nous exprimons en radians, la formule

$x = \lambda' \cos \varphi'$ ne donnera donc qu'une erreur maximum égale à $0,25 \sin 1'' = 0,000001$ et on a

$$x' = \lambda' \cos \varphi' + \varepsilon$$

avec

$$\varepsilon < 0,000001.$$

On en tire

$$x'^2 = \lambda'^2 \cos^2 \varphi' + 2\varepsilon \lambda' \cos \varphi' + \varepsilon^2$$

qui, dans notre approximation, se limite à

$$x'^2 = \lambda'^2 \cos^2 \varphi'$$

et la formule de calcul de σ devient

$$\lg(\sigma)'' = \lg \sin \varphi' + \lg(x') + \lg(\lambda') + \frac{M\lambda'^2}{3} \left[\cos^2 \varphi' \frac{1}{4} \right] + [\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''].$$

Dans l'approximation recherchée (unité du 6^e ordre) nous pouvons développer

$$\lg x' = \lg(\lambda' \cos \varphi' + \varepsilon),$$

où (voir plus haut)

$$\varepsilon = \frac{x'^3}{6} - \frac{\lambda'^3}{6} \cos^3 \varphi';$$

suivant la série logarithmique, on aura

$$\lg x' = \lg \lambda' \cos \varphi' + M \frac{\varepsilon}{\lambda' \cos \varphi'},$$

d'où, en remplaçant ε ,

$$\lg x' = \lg \lambda' \cos \varphi' + \frac{M \left[\frac{x'^3}{6} - \frac{\lambda'^3}{6} \cos^3 \varphi' \right]}{\lambda' \cos \varphi'}$$

qui peut aussi s'écrire ($x'^3 = \lambda'^3 \cos^3 \varphi'$)

$$\lg x' = \lg \lambda' \cos \varphi' + M \left[\frac{x'^2}{6} - \frac{\lambda'^2}{6} \right],$$

ou encore

$$\begin{aligned} \lg x' &= \lg \lambda' \cos \varphi' + M \frac{\lambda'^2}{6} [\cos^2 \varphi' - 1] \\ &= \lg \lambda' \cos \varphi' - \frac{M\lambda'^2}{6} \sin^2 \varphi'. \end{aligned}$$

La substitution donne

$$\lg(\sigma)'' = \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + \frac{M\lambda'^2}{6} \left[\frac{3}{2} + \cos^2 \varphi' \right] + \text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''.$$

Nous notons

$$C_3 = \frac{M\lambda'^2}{6} \left[\frac{3}{2} + \cos^2 \varphi' \right]$$

et nous en dressons la table :

$$C_3 = f(\lambda, \varphi') = 0,07288 \lambda^2 \left[\frac{3}{2} + \cos^2 \varphi' \right].$$

Le calcul de $(\sigma)''$ devient simple par

$$\lg(\sigma)'' = \lg \operatorname{tg} \varphi' + \lg x'^2 + C_3 + \operatorname{clg} 2 \sin 1'',$$

si l'on remarque que $\lg x'$ a été trouvé antérieurement.

Les opérations

$$y' = \varphi' + \sigma$$

et

$$Y = a \sqrt{1 - e^2} y'$$

achèvent le calcul des coordonnées rectangulaires X et Y.

C. — Nous publions les tables I, II, III, IV nécessaires au calcul de XY au départ des λ, φ . Elles donnent la transformation $\varphi' = f(\varphi)$ et les corrections C_1, C_2 et C_3 que nous avons indiquées ci-dessus. Nous en résumons l'emploi dans l'exemple suivant :

D. — Soit à calculer les coordonnées X, Y de GAUSS du point principal GONINI (p. 162 du mémoire *Triangulation du Congo oriental*, présenté à l'I.R.C. par M. l'Ingénieur en chef J. MAURY).

Coordonnées GONINI extraites du mémoire :

$$\begin{cases} \varphi = - 2^\circ 47' 36'',122 \\ \lambda = - 28^\circ 53' 08'',035 \\ X = 96.078,09 \text{ m} \\ Y = 256.092,71 \text{ m.} \end{cases}$$

Ces coordonnées X, Y ont été calculées par les formules de BÖHLER dans le fuseau GAUSS, dont l'axe est le 30° méridien E.G.

Nous donnons ci-après les étapes du calcul de X, Y, par les formules que nous proposons.

1^{er} tableau du formulaire de calcul.

a) Calcul de l'écart en longitude entre GONINI et le méridien central :

$$\lambda = 30^\circ - 28^\circ 53' 08'',035 = 1^\circ 06' 51'',965 = 4011'',965.$$

b) Calcul de $\varphi' = f(\varphi)$: c'est le passage conforme de l'ellipsoïde à la sphère (correspondance des latitudes).

Il faut interpoler dans la table I la latitude $\varphi = 2^\circ 47' 36'', 1220$.

Rappelons $\varphi' = \varphi + 2h$, où h est négative;

pour que $\varphi = 2^{\circ}45'$, on lit $\varphi' = 2^{\circ}44'26''$, 3425;

φ' , pour $\varphi = 2^{\circ}47'36''$, 1220, s'interpole comme suit :

$$\varphi' = 2^{\circ}44'26''3425 + 2'36'',1220 - [2 \times 0'',2030 + 36,1220 \times 0,003383];$$

$$\varphi' = 2^{\circ}47'01'',9363.$$

2° *tableau du formulaire de calcul.* — C'est le calcul de $\lg x'$ à 8 décimales :

$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1,$$

C_1 est négative.

Le poste $[\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1-e^2}]$ est calculé une fois pour toutes et sera imprimé avec le formulaire.

Il vaut (ellipsoïde CLARKE 1880)

$$4.68705727$$

On a

$$\lg \cos \varphi' = 9.99948717$$

$$\lg (\lambda)'' = 3.60335713$$

C_1 est interpolé table II, $C_1 = -6$, que nous écrivons,
en prenant le cologarithme

$$9.99999994$$

$$\text{Le total donne } \lg x' = 8.28990151$$

3° *tableau du formulaire de calcul.* — C'est le calcul de la coordonnée X (8 décimales) :

$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1-e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(\lambda)}] + C_2.$$

$$\lg x' \text{ vient d'être calculé } \lg x' = 8.28990151;$$

$$\lg a \sqrt{1-e^2} \text{ est imprimé avec le formulaire } 6.80321907;$$

$\lg \sin 1''$ est imprimé en tête du formulaire;

$S_{(\lambda)}$ s'interpole en assimilant $\lg x'$ à $\lg \sin x'$;

on trouve

$$S_{(\lambda)} = 4.68554737 - \frac{13 \times 13}{108} 10^{-8}$$

$$\text{et } \lg \sin 1'' - S_{(\lambda)} = 0.00002752.$$

C_2 est nulle (elle l'est constamment si $\lambda < 1^{\circ}30$).

$$\text{Le total donne } \lg X = 5.09314810.$$

$$X = 123.921,91.$$

Pour confronter notre résultat avec le résultat de BÖHLER, nous décalons les axes comme il a été fait dans le mémoire *Triangulation du Congo oriental* :

$$X \text{ définitif} = 220.000 - 123.921,91 = 96.078,09 \text{ m.}$$

4^e tableau du formulaire. — C'est le calcul, à 6 décimales, de

$$\lg(\sigma)'' = [\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''] + \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + C_3.$$

colg 2 + colg sin 1'' est imprimé avec le formulaire; il vaut 5.013395.

On a

lg φ'	=	8.686863
lg x'^2 est le double de lg x' trouvé plus haut	=	6.579803
C_3 s'interpole table IV; $C_3 = 55 + \left[\frac{75-55}{10} \right] 7$	=	69

Le total est lg $(\sigma)''$	=	0.280135
	$(\sigma)''$	= 1'',9060

5^e tableau du formulaire. — C'est la somme $(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$.

On a

$(\varphi')'' =$	10.021'',9363
$(\sigma)'' =$	1'',9060
$(y')'' =$	10.023'',8423

6^e tableau du formulaire. — C'est le calcul de la coordonnée Y de GAUSS :

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}.$$

On a

lg $(y')''$	=	4,00103423
lg $a \sin 1'' \sqrt{1-e^2}$ est imprimé, avec le formulaire.	=	1.48879394
	lg Y	= 5.48982817
	Y	= 308.907,29 m.

Nous confrontons ce résultat avec celui de BÖHLER, en décalant l'origine de 565 km vers le Sud.

$$Y \text{ définitif} = 565.000 \text{ m} - 308.907,29 \text{ m} = 256.092,71 \text{ m.}$$

*
* *

Nous indiquons ci-après un modèle de formulaire pour le calcul des coordonnées rectangulaires de GAUSS (ellipsoïde de CLARKE 1880).

FORMULES

pour le calcul des coordonnées rectilignes
dans la projection conforme de GAUSS.

(Ellipsoïde de Clarke 1880.)

$$\varphi' = \varphi + 2h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1 \quad (\text{Table II})$$

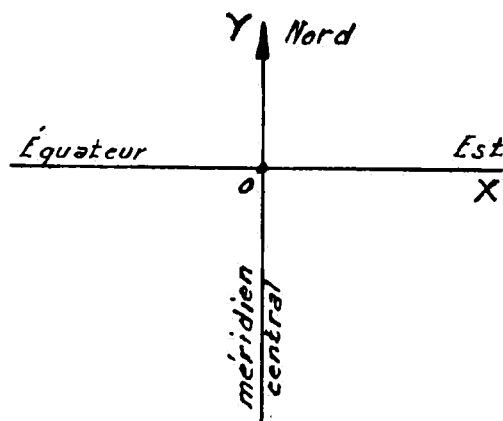
$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1 - e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(x)}] + C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 \sin 1''] + \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Table IV})$$

$$(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$$

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}.$$

X et Y se rapportent aux axes.



Méridien central 30° E. G.

Log sin 1'' Appellation	4,68557487 GONINI
λ	28°53'08,035
$(\lambda)''$	4011,965
φ	2°47'36,1220
φ'	2°47'01,9363
$\lg \sin 1''$ $\lg \sqrt{1 - e^2}$	4,68705727
$\lg \cos \varphi'$	9,99948717
$\lg (\lambda)''$	3,60336713
C_1	9,99999994
$\lg x'$	8,28990151
$\lg a \sqrt{1 - e^2}$	6,80321907
$\lg \sin 1'' - S(x')$	2752
C_2	0
$\lg X$	5,09314810
X	123.921,91
X_0	220.000,00
X définitif	096.078,09
$\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''$	5,013395
$\lg \text{tg } \varphi'$	8,686868
$\lg x'^2$	6,579803
C_3	69
$\lg (\sigma)''$	0,280135
$(\sigma)''$	1,9060
$(\varphi)''$	10.021,9363
$(y')''$	10.023,8423
$\lg (y')''$	4,00103423
$\lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}$	1,48879394
$\lg Y$	5,48982817
Y	308.907,29
Y_0	565.000 00
Y définitif	256.092,71

REMARQUE. — Si l'on adopte le fuseau de Gauss couvrant 6° de longitude et toutes les latitudes congolaises, il conviendra, pour maintenir les X et Y positifs, de décaler l'origine de 400 km vers l'Ouest et de 1.600 km vers le Sud (X_0 , Y_0).

FORMULES

pour le calcul des coordonnées rectilignes
dans la projection conforme de GAUSS.

(Ellipsoïde de Clarke 1880)

$$\varphi' = \varphi + 2h \quad (\text{Table I})$$

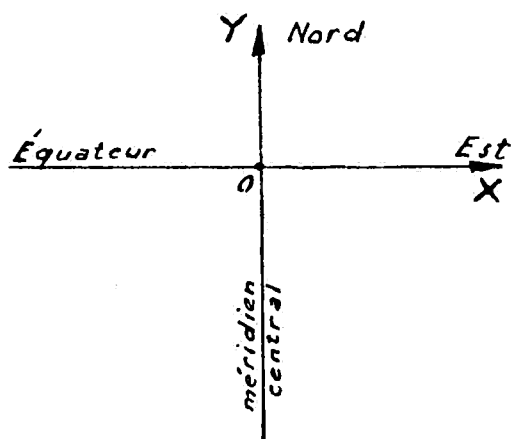
$$\lg x' = [\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}] + \lg \cos \varphi' + \lg (\lambda)'' + C_1 \quad (\text{Table II})$$

$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1 - e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 \sin 1''] + \lg \text{tg } \varphi' + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Table IV})$$

$$(y')'' = (\varphi')'' + (\sigma)''$$

$$\lg Y = \lg (y')'' + \lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}.$$



REMARQUE. — Si l'on adopte le fuseau de Gauss couvrant 6° de longitude et toutes les latitudes congolaises, il conviendra, pour maintenir les X et Y positifs, de décaler l'origine de 400 km vers l'Ouest et de 1.600 km vers le Sud (X_0 , Y_0).

Méridien central 30° E. G.	
Log sin 1'' Appellation	4,68557487
λ $(\lambda)''$ φ φ'	
$\lg \sin 1'' - \lg \sqrt{1 - e^2}$ $\lg \cos \varphi'$ $\lg (\lambda)''$ C_1	4,68705727
$\lg x'$ $\lg a \sqrt{1 - e^2}$ $\lg \sin 1'' - S(x')$ C_2	6,80321907
$\lg X$ X X_0 X définitif	
$\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''$ $\lg \text{tg } \varphi'$ $\lg x'^2$ C_3	5,013395
$\lg (\sigma)''$ $(\sigma)''$ $(\varphi')''$	
$(y')''$ $\lg (y')''$ $\lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}$	1,48879394
$\lg Y$ Y Y_0 Y définitif	

7. PROJET D'EMPLOI DE FUSEAUX GAUSS COUVRANT 6 DEGRÉS EN LONGITUDE.

La portée d'une projection conforme est limitée par les altérations de longueur qu'elle introduit, mais il convient de noter que ces altérations sont calculables par des formules précises et simples.

Une limite généralement admise pour les altérations de longueur est $\frac{1}{2.000}$ (MAURY, TARDI).

Les altérations de longueur de la projection de GAUSS sont données par

$$S = \left[\frac{1 - X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2}{6 R_0^2} \right] [1 + \alpha] s,$$

où S est la longueur d'une géodésique entre deux points de l'ellipsoïde;

s est la longueur de la transformée de cette géodésique sur le plan, que nous pouvons assimiler à

$$l = \sqrt{[X_2 - X_1]^2 + [Y_2 - Y_1]^2},$$

(X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) étant les coordonnées planes des extrémités de la transformée s .

α est la valeur moyenne de $1 - \frac{a \cos \varphi'}{N \cos \varphi}$, expression trouvée lors de l'étude de la représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère de courbure moyenne en un point de l'équateur. α ne dépasse pas 3.10^{-6} pour le territoire congolais.

Nous savons, d'autre part, que nous pouvons réduire de moitié les altérations de longueur par la réduction d'échelle de Tissot.

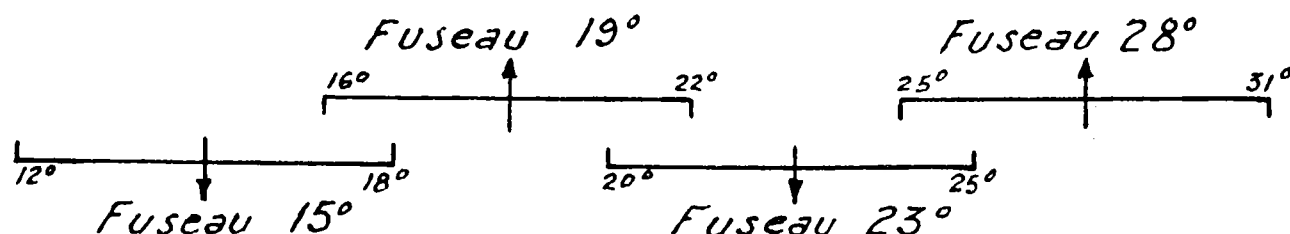
L'altération linéaire croît avec X et nous obtiendrons la portée en X de la projection par

$$\frac{X^2}{2 R_0^2} \leq \frac{1}{4000}.$$

Nous avons trouvé (CLARKE 1880) $X = 282$ km, soit environ $2^{\circ}30'$ de longitude.

La latitude n'influe sur les altérations que par un poste qui ne dépasse pas 3.10^{-6} .

CONCLUSIONS. — Par l'application de la réduction de Tissot, nous pouvons partager le territoire congolais en fuseaux de $2^{\circ}30'$ de longitude, sans dépasser $\frac{1}{2.000}$ pour les altérations linéaires. Pour ménager des bandes de recouvrement suffisantes entre fuseaux voisins, nous avons étendu le calcul à 3° du méridien central. Ceci nous donne la disposition suivante :



que nous proposons pour la topographie, la cartographie, le cadastre, la topométrie et la géodésie congolais.

a) Topographie, cartographie et cadastre se satisfont de l'altération maximum inférieure au $\frac{1}{2.000}$.

b) Les besoins de la topométrie sont plus rigoureux, mais le calcul peut donner les altérations de longueur avec toutes la précision souhaitable $\left[\frac{1}{10^6}\right]$.

Par ailleurs, la topométrie est locale, au sens que ses déterminations ne couvrent qu'un terrain de peu d'étendue (ville, grosse agglomération), et il est toujours possible d'y réduire l'échelle locale, suivant Tissot, d'autant qu'il sera désirable.

Exemple : 1° On désire pour la topométrie d'une ville une échelle locale moyenne $K = 1 + \frac{1}{10.000}$;

2° On a, par la projection ordinaire de GAUSS, pour l'étendue de la ville, un K moyen égal à $1 + \frac{1}{2.000}$, par exemple.

Nous procédons comme suit : multiplions toutes les coordonnées de la ville par $1 - \frac{1}{2.000n}$; nous conservons la conformité avec une échelle locale moyenne

$$K = \left[1 + \frac{1}{2.000}\right] \left[1 - \frac{1}{2.000n}\right],$$

soit

$$K = 1 - \frac{1}{2.000n} + \frac{1}{2.000} - \frac{1}{4.000.000n};$$

imposons

$$\frac{1}{2.000} - \frac{1}{2.000n} = \frac{1}{10.000};$$

il en résulte $n = \frac{5}{4}$. Le poste $\frac{4}{4.000.000 \times 5}$ est évidemment négligeable et notre problème est résolu.

c) Nous avons traité l'emploi géodésique de la projection de GAUSS dans une note spéciale.

*
**

L'état actuel des calculs des coordonnées de GAUSS pour le Congo belge ne semble pas un obstacle à l'adoption des fuseaux plus étendus que nous présentons.

TABLE I

$$\varphi' = \varphi + 2 h$$

φ	φ'	Diff. pour 1' (φ)	Diff. pour 1'' (φ)
0°00'	00°00'00,0000	0,20444	0,003407
05	04 58 9777	44	3407
10	09 57 9555	44	3407
15	14 56 9333	44	3407
20	19 55 9111	42	3407
25	24 54 8890	42	3407
30	29 53 8669	40	3407
35	34 52 8449	38	3406
40	39 51 8230	36	3406
45	44 50 8012	34	3406
50	49 49 7795	30	3405
55	54 48 7580	28	3405
1°00	59 47 7366	26	3404
05	01°04'46,7153	22	3404
10	09 45 6942	18	3403
15	14 44 6733	14	3402
20	19 43 6526	10	3402
25	24 42 6321	06	3401
30	29 41 6118	02	3400
35	34 40 5917	0,20396	3399
40	39 39 5719	90	3398
45	44 38 5524	86	3398
50	49 37 5331	80	3397
55	54 36 5141	74	3306
2°00	59 35 4954	68	3395

Table I

$$\varphi' = \varphi + 2 h$$

φ	φ'	Diff. pour 1' (φ)	Diff pour 1'' (φ)
2°00'	01°59'35",4954	0,20368	0,003395
05	02 04 34 4770	62	3394
10	02 09 33 4589	54	3392
15	14 32 4412	48	3391
20	19 31 4238	42	3390
25	24 30 4067	32	3389
30	29 29 3901	24	3388
35	34 28 3739	18	3386
40	39 27 3580	10	3385
45	44 26 3425	00	3383
50	49 25 3275	0,20292	3382
55	54 24 3129	82	3380
3°00	59 23 2988	74	3379
05	03°04'22",2851	64	3377
10	09 21 2719	56	3376
15	14 20 2591	44	3374
20	19 19 2469	34	3372
25	24 18 2352	22	3370
30	29 17 2241	12	3369
35	34 16 2135	02	3367
40	39 15 2034	0,20190	3365
45	44 14 1939	78	3363
50	49 13 1850	66	3361
55	54 12 1767	56	3359
4°00	59 11 1689	42	3357

TABLE I

$$\varphi' = \varphi + 2 h$$

φ	φ'	Diff. pour 1' (φ)	Diff. pour 1'' (φ)
4°00'	03°59'11",1689	0,20142	0,003357
05	04°04'10",1618	30	3355
10	09 09 1553	46	3353
15	14 08 1495	02	3351
20	19 07 1444	0,20092	3349
25	24 06 1398	78	3346
30	29 05 1359	62	3344
35	34 04 1328	50	3342
40	39 03 1303	36	3339
45	44 02 1285	18	3336
50	49 01 1276	04	3334
55	54 00 1274	0,19990	3332
5°00	58 59 1279	76	3329
05	05°03'58",1291	58	3326
10	08 57 1312	42	3324
15	13 56 1341	28	3321
20	18 55 1377	10	3318
25	23 54 1422	0,19892	3315
30	28 53 1476	78	3313
35	33 52 1537	60	3310
40	38 51 1607	42	3307
45	43 50 1686	24	3304
50	48 49 1774	06	3301
55	53 48 1871	0,19790	3298
6°00	58 47 1976		

$$(\lambda')'' - (x')'' = 2 (\lambda')'' \sin^2 \frac{\varphi'}{2}$$

8° ordre

$\lambda \backslash \varphi'$	0°	1°	2	3°	4°	5°	6°	6°30''
0''	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	1	1	2	3	3
1000	0	0	1	1	2	4	5	6
1500	0	0	1	2	4	6	8	10
2000	0	0	1	3	5	8	11	13
2500	0	0	2	3	6	10	14	16
3000	0	0	2	4	7	11	16	19
3500	0	1	2	5	9	13	19	23
4000	0	1	2	6	10	15	22	26
4500	0	1	3	6	11	17	25	29
5000	0	1	3	7	12	19	27	32
5500	0	1	3	8	13	21	30	35
6000	0	1	4	8	15	23	33	39
6500	0	1	4	9	16	25	36	42
7000	0	1	4	10	17	27	38	45
7500	0	1	5	10	18	29	41	48
8000	0	1	5	11	20	31	44	51
8500	0	1	5	12	21	32	47	55
9000	0	1	6	12	22	34	49	58
9500	0	1	6	13	23	36	52	61
10000	0	2	6	14	24	38	55	64
10500	0	2	6	14	26	40	58	68
10800	0	2	7	15	26	41	59	69

TABLE II

 $C_1 = f'(\lambda, \varphi') - \text{négative}$

8° ordre

$\lambda \backslash \varphi'$	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	6°30''
0'	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	0	0	1	1	1
1000	0	0	0	1	1	2	2	2
1500	0	0	0	1	2	3	4	5
2000	0	0	1	2	3	5	8	9
2500	0	0	1	3	5	8	12	14
3000	0	0	2	4	7	11	17	20
3500	0	1	3	6	10	16	23	27
4000	0	1	3	7	13	21	30	35
4500	0	1	4	9	17	26	38	44
5000	0	1	5	12	21	32	47	55
5500	0	2	7	14	25	39	56	66
6000	0	2	8	17	30	47	67	79
6500	0	2	9	19	35	55	79	93
7000	0	3	10	23	41	64	92	108
7500	0	3	12	26	47	73	105	124
8000	0	3	13	30	53	83	120	141
8500	0	4	15	34	60	94	135	159
9000	0	4	17	38	68	106	151	178
9500	0	5	19	42	75	118	169	198
10000	0	5	21	47	83	130	188	220
10500	0	6	23	52	92	143	206	242
10800	0	6	25	55	97	152	218	256

TABLE III

$$C_2 = \frac{M x'^4}{45} - \text{positive}$$

8° ordre

λ	0°	1°30'	2°00'	2°10'	2°20'	2°30'	2°40'	2°50'	3°00'
C_2	0	0,5	1,5	2,0	2,8	3,6	4,7	5,9	7,5

TABLE IV

$$C_3 = 0,07288 \lambda [1,5 + \cos^2 \varphi'] - \text{positive}$$

6° ordre

$\lambda \backslash \varphi'$	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
0°00'	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	2	2	2	2	2	2	2
20	6	6	6	6	6	6	6	6
30	14	14	14	14	14	14	14	14
40	25	25	25	25	25	25	25	25
50	39	39	39	39	38	38	38	38
1°00	56	56	56	55	55	55	55	55
10	76	76	76	75	75	75	75	75
20	99	99	99	99	99	98	98	98
30	125	125	125	125	125	125	125	125
40	154	154	154	154	154	154	154	153
50	187	187	186	186	186	186	186	185
2°00	222	222	222	222	222	221	221	221
10	261	261	260	260	260	260	259	259
20	302	302	302	302	302	301	301	300
30	347	347	347	347	346	346	345	345
40	395	395	395	394	394	394	393	393
50	446	446	446	445	445	444	444	443
3°00	500	500	449	499	499	498	497	497

**8. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE MÉRIDIENTE r
DANS LA PROJECTION
CONFORME DE GAUSS (SYSTÈME ÉQUATORIAL).**

A. — Rappel d'un théorème de Clairaut.

ÉNONCÉ. — En tout point d'une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution, le produit du rayon du parallèle par le sinus de l'azimut est constant.

1° *Equation de la surface de révolution.* — Prenons l'axe de révolution pour axe OZ.

Les axes OX et OY sont quelconques dans un plan perpendiculaire à OZ.

Concevons la surface de révolution engendrée par une circonférence (parallèle) dans un plan perpendiculaire à OZ, s'appuyant sur une courbe quelconque d'équations $f_1(XYZ) = 0$ et $f_2(XYZ) = 0$.

Les équations de cette circonférence peuvent s'écrire

$$Z = C_1 \text{ (plan);}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = C_2 \text{ (sphère de centre O).}$$

Écrivons que cette circonférence s'appuie sur la courbe [$f_1 = 0$, $f_2 = 0$]. Pour cela éliminons X, Y et Z entre

$$f_1 = 0;$$

$$f_2 = 0;$$

$$Z = C_1;$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = C_2.$$

L'élimination donnera une relation $\psi(C_1, C_2) = 0$ et l'équation de la surface de révolution est

$$\psi(Z, (X^2 + Y^2 + Z^2)) = 0.$$

2° *Propriété de la ligne géodésique.* — L'analyse démontre qu'en tout point d'une ligne géodésique d'une surface, la normale principale coïncide avec la normale à la surface.

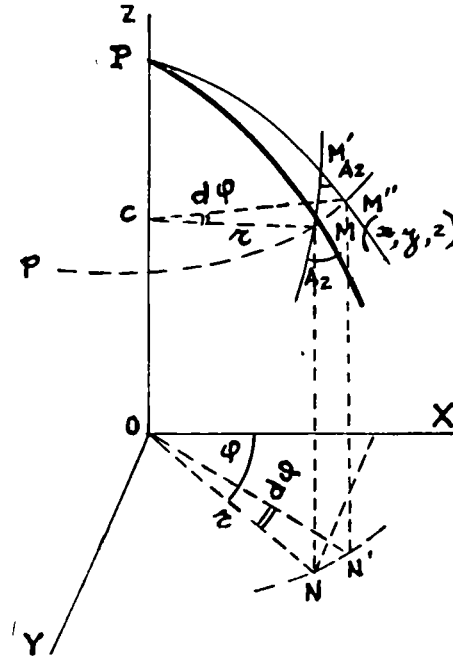
Écrivons cette propriété dans le cas particulier de la géodésique tracée sur une surface de révolution.

Les équations de la normale principale à la courbe en un point (x, y, z) sont

$$\frac{X - x}{\frac{d^2 x}{d s^2}} = \frac{Y - y}{\frac{d^2 y}{d s^2}} = \frac{Z - z}{\frac{d^2 z}{d s^2}}. \quad (1)$$

Les équations de la normale à la surface $\psi[Z, (X^2 + Y^2 + Z^2)] = 0$ sont

$$\frac{X-x}{2x \frac{\partial \psi}{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{Y-y}{2y \frac{\partial \psi}{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{Z-z}{2z \frac{\partial \psi}{\partial (x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{\partial \psi}{\partial z}}. \quad (2)$$



L'identification des équations (1) et (2), membre à membre, donne

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{y}$$

soit

$$y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

et, par intégration,

$$y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} = C^te. \quad (3)$$

Dessignons l'axe OZ et au point M de la surface de la révolution :

la méridienne MP,

le parallèle Mp,

l'élément ds de géodésique ds = MM',

la méridienne PM',

le centre C du parallèle Mp,

M'', intersection de PM' et de Mp.

Exprimons x et y en fonction des *coordonnées cylindriques* r et φ .

Projetons M et M' sur Oxy en N et N' :

$$r = CM = CM' = ON = ON'.$$

On a

$$x = r \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Effectuons ce changement de variables dans (3). Il vient

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi;$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

et, en remplaçant,

$$r \sin \varphi [\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi] - r \cos \varphi [\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi] = C ds,$$

soit

$$-r^2 d\varphi = C ds. \quad (4)$$

Dans le plan tangent à la surface en M , le triangle infiniment petit $MM'M''$ donne

$$MM'' = r d\varphi = MM' \sin A_s = ds \sin A_s. \quad (5)$$

Divisons (4) et (5) membre à membre; on trouve

$$r' = \frac{-C}{\sin A_s},$$

que l'on écrit

$$r \sin A_s = \text{constante};$$

c'est la relation de CLAIRAUT.

B. — Étude de la convergence méridienne γ .

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. — Dans ce qui suit, nous considérons la projection de GAUSS obtenue par l'intermédiaire de la représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère de courbure moyenne en un point le long de l'équateur.

DÉFINITION. — On appelle convergence méridienne au point $M_1 (X, Y)$ d'une représentation plane le plus petit angle γ compris entre la parallèle à l'axe OY et la tangente à la transformée plane du méridien en ce point $\gamma = m M_1 Y'$.

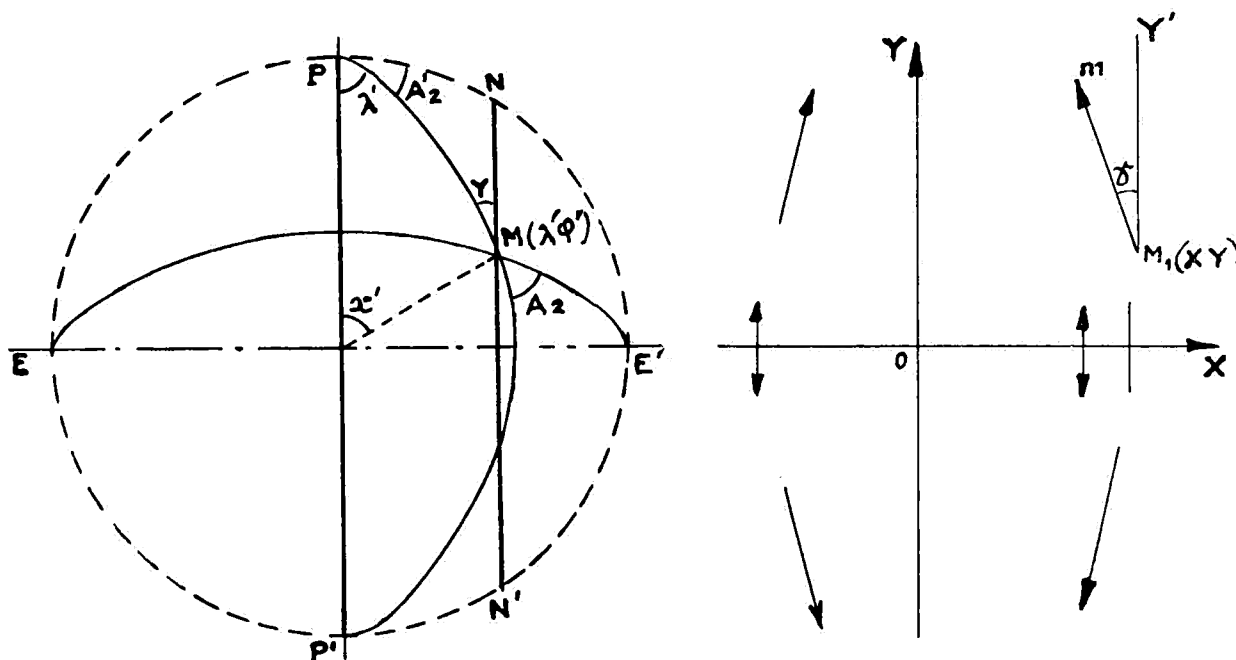
Orientation de Mm . — Rappelons

$$\sin x' = \sin \lambda' \cos \varphi';$$

$$X = R_0 \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right).$$

Le long de la transformée du méridien λ' , x' décroît avec ϕ' croissant; il en est de même de X ; l'orientation de Mm s'en déduit. Nous portons à la figure les orientations des méridiens dans les quatre quadrants de la carte.

Calcul de γ . — L'orientation étant définie comme ci-dessus, nous calculons γ en valeur absolue, pour un point du 1^{er} quadrant (N. E., où X et Y sont positifs).



Par définition de la projection de GAUSS, si nous supposons x' constant, la droite

$$X = R_0 \lg_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right)$$

est la transformée du petit cercle NMN' tracé du pôle E' .

Sur la sphère R_0 , γ est l'angle entre le méridien MP et le petit cercle MN , au point $M(\lambda'\phi')$ correspondant de $M_1(XY)$.

Appliquons la relation de CLAIRAUT en considérant EE' comme ligne des pôles. Les parallèles seront définis par les angles x' ; notons r les rayons de ces parallèles (plans perpendiculaires au plan du dessin). On a $r \sin A_2 = C$.

Faisant convention de compter les azimuts (pôle E') comme le montre la figure, la constante de la relation de CLAIRAUT se détermine au point P :

$$C = R_0 \sin A'_2 = R_0 \cos \lambda',$$

et nous aurons en M

Or,

$$r \sin A_z = r \cos \gamma = R_0 \cos \lambda'.$$

$$r = R_0 \cos x'$$

et il vient

$$R_0 \cos x' \cos \gamma = R \cos \lambda';$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos \lambda'}{\cos x'}.$$

L'élimination de x' entre cette relation et $\sin x' = \sin \lambda' \cos \varphi'$ donnera γ en fonction de λ' et de φ' .

On a les formules générales

$$\sin x' = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} \quad \text{et} \quad \cos x' = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}}.$$

Le remplacement donne

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} = \sin \lambda' \cos \varphi';$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} = \frac{\cos \lambda'}{\cos \gamma}.$$

Divisons membre à membre; il vient

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x'}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} = \operatorname{tg} \lambda' \cos \varphi' \cos \gamma,$$

ou encore

$$\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} \lambda' \cos \varphi' \cos \gamma,$$

que nous écrivons

$$\frac{\sin x'}{\sqrt{1 - \sin^2 x'}} = \operatorname{tg} \lambda' \cos \varphi' \cos \gamma.$$

En élevant au carré et en remplaçant $\sin x'$, on a

$$\frac{\sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi'}{1 - \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi'} = \operatorname{tg}^2 \lambda' \cos^2 \varphi' \cos^2 \gamma$$

et

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 \lambda'}{1 - \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi'},$$

d'où l'on tire

$$\sin \gamma = \frac{\sin \lambda' \sin \varphi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi'}}.$$

Calcul pratique de γ . — γ doit évidemment être calculée avec la même précision que les angles des figures géodésiques (azimuts des côtés), soit à moins de 0'',005.

On vérifie aisément que γ croît avec λ' et φ' croissants, et l'ordre de grandeur de la valeur maximum de γ sera donné par

$$\sin \gamma = \frac{\sin 3^\circ \sin 13^\circ}{\sqrt{1 - \sin^2 3^\circ \cos^2 13^\circ}}.$$

On trouve $\gamma \sim 40' = 2400''$; d'où l'on conclut que pour obtenir le chiffre des centièmes de seconde exact, il faut calculer γ avec six chiffres exacts.

En passant aux logarithmes, on trouve

$$\lg \sin \gamma = \lg \sin \lambda' + \lg \sin \varphi' - \frac{1}{2} \lg (1 - \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi').$$

Faisons usage des développements

$$\frac{1}{2} \lg (1 - \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi') = -\frac{M}{2} \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi' - \frac{M}{4} \sin^4 \lambda' \cos^4 \varphi' - \dots$$

et

$$\lg \sin \gamma = \lg \gamma - \frac{M \gamma^2}{6} - \frac{M \gamma^4}{180} - \dots$$

Nous obtenons

$$\lg \gamma = \lg \sin \lambda' + \lg \sin \varphi' + \frac{M \gamma^2}{6} + \frac{M \gamma^4}{180} + \frac{M}{2} \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi' + \frac{M}{4} \sin^4 \lambda' \cos^4 \varphi' + \dots$$

On peut calculer $\frac{M \gamma_{\max}^2}{6} \sim 0,00001$ et il s'ensuit que, pour le calcul de $\frac{M \gamma^2}{6}$, nous pouvons accepter

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \sin^2 \lambda' \sin^2 \varphi'; \\ \frac{M \gamma^2}{6} &= \frac{M \sin^2 \lambda'}{6} [1 - \cos^2 \varphi']. \end{aligned}$$

Le remplacement donne

$$\lg \gamma = \lg \sin \lambda' + \lg \sin \varphi' + \frac{M \sin^2 \lambda'}{6} + \frac{M \gamma^4}{180} + \frac{M}{3} \sin^2 \lambda' \cos^2 \lambda' + \frac{M}{4} \sin^4 \lambda' \cos^4 \varphi' + \dots$$

qui, en tenant compte de

$$\lg \lambda' = \lg \sin \lambda' + \frac{M \sin^2 \lambda'}{6} + \frac{11 \sin^4 \lambda'}{180} + \dots,$$

devient

$$\lg \gamma = \lg \lambda' + \lg \sin \varphi' + \frac{M}{3} \sin^2 \lambda' \cos^2 \varphi' + M \sin^4 \lambda' \left[\frac{\cos^4 \varphi'}{4} - \frac{11}{180} + \frac{\sin^4 \varphi'}{180} \right] + \dots$$

On établit sans peine que

$$M \sin^4 \lambda' \left[\frac{\cos^4 \varphi'}{4} - \frac{11}{180} + \frac{\sin^4 \varphi'}{180} \right] < \frac{1}{10^6};$$

et dans l'approximation que nous nous sommes fixée, nous aurons, en nous exprimant en secondes sexagésimales :

$$\lg (\gamma)'' = \lg (\lambda')'' + \lg \sin \varphi' + \frac{M \sin^2 1''}{3} [(\lambda')'' \cos \varphi']^2,$$

que nous rapprochons de la formule donnée par BÖHLER :

$$\lg (\varphi)'' = \lg (\lambda'' \sin \varphi) + (\lambda'' \cos \varphi)^2.$$

(*Astronomisch-Geodätisch-Hilfstafeln*, p. 19, BÖHLER, D^r AMBRONN, D^r DOMKE, Berlin, 1909, E. S. Mittler und Sohn).

Pour nous servir des tables de BÖHLER, exprimons

$$\frac{M \sin^2 1''}{4} [(\lambda')'' \cos \varphi']^2$$

en unités de la 7^e décimale. Posons

$$v = \frac{M \sin^2 1'', 10^7}{3};$$

nous lisons $v [(\lambda')'' \cos \varphi']^2$ dans la table III [p. 122 des *Hilfstafeln*], où l'argument est $\lg [(\lambda')'' \cos \varphi']$.

Introduisons $\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}}$, et finalement nous calculons

$$(\gamma)'' = \lg (\lambda)'' + \operatorname{colg} \sqrt{1-e^2} + \lg \sin \varphi' + v [(\lambda')'' \cos \varphi']^2.$$

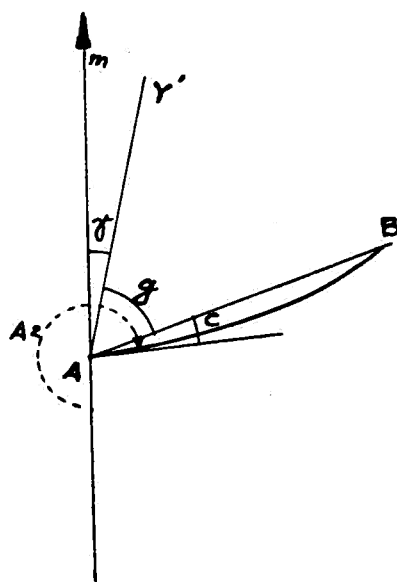
Pour nous servir de résultats déjà obtenus par le calcul des coordonnées X et Y du point considéré, nous écrivons

$$\lg \sin \varphi' = \lg \operatorname{tg} \varphi' + \lg \cos \varphi'.$$

On aura, par exemple, au point GONINI :

$$\begin{aligned}
 \lg (\lambda)'' &= 3,603357 \\
 \lg \operatorname{tg} \varphi' &= 8,686868 \\
 \lg \cos \varphi' &= 9,999487 \\
 \operatorname{clg} \sqrt{1-e^2} &= 0,001482 \\
 \nu [(\lambda')'' \cos \varphi']^2 &= \frac{55}{1} [\lg (\lambda')'' + \lg \cos \varphi' + \operatorname{clg} \sqrt{1-e^2}] = 3,6043 \\
 \lg (\gamma)'' &= 2,291249 \\
 \gamma'' &= 195'',55 \\
 \gamma &= 3'15'',55
 \end{aligned}$$

REMARQUE — Pour le calcul à la machine, nous avons établi la formule beaucoup plus simple : $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \lambda' \sin \varphi'$.



REMARQUE FINALE. — La connaissance de la convergence méridienne permet le passage du gisement d'un côté A B sur le plan à l'azimut du côté correspondant sur l'ellipsoïde, par la relation

$$A_s = 180^\circ + \gamma + g + c,$$

où il convient évidemment d'adapter les signes à la position de A B dans le plan.

Nous avons indiqué, par ailleurs, la formule donnant c , angle entre la corde rectiligne A B et la tangente à la transformée plane de la géodésique A B de l'ellipsoïde :

$$c = \frac{1}{2 R_0^2 \sin 1''} \left[X_A + \frac{X_B - X_A}{3} \right] [Y_B - Y_A] \frac{1}{K_3}.$$

La concavité est ouverte vers le K décroissant.

9. PROBLÈME INVERSE.

CALCUL DE λ ET φ CONNAISSANT X ET Y.

Nous procédons par voie d'approximations successives. Nous indiquons ci-après la suite des opérations qui permet de calculer λ et φ avec des erreurs inférieures à 0'',0003.

1° DÉTERMINATION DE φ' . — On a

$$\lg (y')'' = \lg Y - \lg a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2};$$

$$\varphi' = y' - \sigma;$$

$$\lg (\sigma)'' = [\text{clg } 2 + \text{clg } \sin 1''] + \lg \lg \varphi' + \lg x'^2 + C_3.$$

La détermination de φ' revient à celle de σ , c'est-à-dire au calcul de $\lg x'^2$, de $\lg \lg \varphi'$ et de C_3 .

a) Calcul de x' . — Rappelons

$$\lg X = \lg x' + \lg a \sqrt{1 - e^2} + [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + C_2.$$

On en tire

$$\lg x' + [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + C_2 = \lg X - \lg a \sqrt{1 - e^2},$$

dont le second membre est pris comme première approximation de $\lg \sin x'$. En négligeant C_2 , dont la valeur maximum est $7,5 \cdot 10^{-8}$, nous voyons que considérer $\lg X - \lg a \sqrt{1 - e^2}$ comme première approximation de $\lg \sin x'$, c'est commettre une erreur à $2[\lg \sin 1'' - S_{(x')}]$, c'est-à-dire, dans les conditions maxima égales à $2[\lg \sin 1'' - S_{36}] \sim 40.000 \cdot 10^{-8}$. Or, aux valeurs maxima ($x \sim 3^\circ$) une erreur égale à

$$8.718\,800\,20 - 8.718\,398\,20 \sim 40.000 \text{ unités du } 8^\circ \text{ ordre}$$

sur $\lg \sin x'$ donne une erreur de 37 unités du 8° ordre sur $S_{(x')}$.

La valeur de $S_{(x')}$ issue de la première approximation de $\lg \sin x'$ sera donc entachée d'une erreur égale au maximum à

$$\frac{37 \times 40.000}{40.000} = 37 \text{ unités du } 8^\circ \text{ ordre.}$$

C'est dire que la seconde approximation suffit pour obtenir $\lg x'$ avec la même approximation que $\lg X$ par

$$\lg x' = \lg X - \lg a \sqrt{1 - e^2} - [\lg \sin 1'' - S_{(x')}]_{2^\circ \text{ approx.}} - C_2.$$

En faisant la seconde interpolation de $S_{(x')}$, on aura soin de lire la valeur angulaire correspondante de (x') , qui suffit pour interpoler C_2 correctement.

b) Calcul de $\lg \operatorname{tg} \varphi'$. — $\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg}(y' - \sigma)$;

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg}(y' - \sigma) = \frac{\operatorname{tg} y' - \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg} y' \operatorname{tg} \sigma};$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi' = \lg [\operatorname{tg} y' - \operatorname{tg} \sigma] - \lg [1 + \operatorname{tg} y' \operatorname{tg} \sigma].$$

En développant, on trouve

$$\lg [\operatorname{tg} y' - \operatorname{tg} \sigma] = \lg \operatorname{tg} y' - M \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} y'} - \left[\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} y'} \right]^2 - \dots;$$

$$\lg [1 + \operatorname{tg} y' \operatorname{tg} \sigma] = M \operatorname{tg} y' \operatorname{tg} \sigma - \frac{M}{2} \operatorname{tg}^2 y' \operatorname{tg}^2 \sigma + \dots$$

et, par remplacement,

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \varphi' &= \lg \operatorname{tg} y' - M \operatorname{tg} \sigma \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2 y'}{\operatorname{tg} y'} \right] - \frac{M}{2} \operatorname{tg}^2 \sigma \left[\frac{1 - \operatorname{tg}^4 y'}{\operatorname{tg}^2 y'} \right] \dots \\ &= \lg \operatorname{tg} y' - \frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'} - \frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} - \dots \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le terme $\frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'}$ (et, par suite, les suivants) est négligeable.

Nous avons établi antérieurement que la valeur maximum de σ est environ $1'$; à cette valeur, nous pouvons confondre $\operatorname{tg} \sigma$ et $\sin \sigma$; en effet, $\sin 1' = \operatorname{tg} 1' = 0,0002909$. Et l'on tire

$$\frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} = \frac{2 M \sin^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} = \frac{2 M \sin^2 \varphi' \operatorname{tg}^2 x' \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'};$$

or,

$$\frac{2 M \sin^2 \varphi' \operatorname{tg}^2 x' \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} < \frac{2 M \sin^2 \varphi' \operatorname{tg}^2 x' \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{\sin^2 2 y'} < \frac{2 M \sin^2 \varphi' \operatorname{tg}^2 x' \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{\sin^2 2 \varphi'}.$$

Le calcul de $\lg \operatorname{tg} \varphi'$ exige 6 décimales exactes pour la détermination précise de $(\sigma)''$. Dans cet ordre de précision, la relation

$$\sin x' = \sin \lambda' \cos \varphi'$$

peut s'écrire

$$\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} \lambda' \cos \varphi',$$

et l'on obtient

$$\frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} < \frac{M \operatorname{tg}^2 \lambda' \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{2}.$$

Cherchons le maximum de cette expression :

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}} = \lambda [1 + 0,0034]; \\ \lambda'_{\max} &= 10.800'' [1 + 0,0034] = 3^{\circ}00'34''; \\ \left(\frac{\lambda'}{2}\right)_{\max} &= 1^{\circ}30'17''. \end{aligned}$$

On trouve

$$\frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'} < 0,000\ 000\ 4.$$

Nous obtiendrons donc 6 décimales exactes en nous limitant à

$$\lg \operatorname{tg} \varphi' = \lg \operatorname{tg} y' - \frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'}.$$

Transformons encore l'expression $\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'}$, dont la plus grande valeur est environ $\frac{0,0003}{0,5} = 0,0006$.

On a

$$2 y' = 2 \varphi' + 2 \sigma$$

et

$$\sin 2 y' = \sin 2 \varphi' + 2 \sigma \cos 2 \varphi'.$$

La valeur maximum de $2 \sigma \cos 2 \varphi'$ est environ 0,0006.

En confondant y' et φ' dans $\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'}$, nous commettons donc une erreur maximum sur $\lg \operatorname{tg} \varphi'$ égale à environ

$$0,0006 \times 0,0006 = 0,000\ 000\ 36.$$

Remarquons que cette erreur est de sens contraire à celle commise en négligeant $\frac{2 M \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{tg} 2 y' \sin 2 y'}$, et de même ordre de grandeur.

Par ailleurs, on peut écrire

$$\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'} = \frac{2 M \sin \sigma}{\sin 2 \varphi'} = \frac{2 M \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}}{\sin 2 \varphi'} = \frac{M \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}}{\cos \varphi'}.$$

Rappelons encore $\sin x' = \sin \lambda' \cos \varphi'$, qui peut s'écrire

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}} \cos \varphi'.$$

Soit

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2} = \operatorname{tg} \frac{x'}{2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} \frac{1}{\cos \varphi'}.$$

Évaluons

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} \text{ en acceptant } \operatorname{tg} \frac{x'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2} \cos \varphi'.$$

On trouve

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x'}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda'}{2}} \sin^2 \varphi'},$$

dont la plus grande valeur est environ $\frac{1}{1 - 0,00004}$, ce qui signifie que si nous acceptons

$$\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'} = \frac{M \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2}}{\cos \varphi'} = \frac{M \operatorname{tg} x' \frac{x'}{2}}{\cos^2 \varphi'},$$

nous commettrons sur $\lg \operatorname{tg} \varphi'$ une erreur maximum de l'ordre de 0,00000006, ce qui est licite dans notre approximation.

Pour exprimer la correction $\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin 2 y'}$ en fonction des données x' et y' , remarquons que, en vertu de $\varphi' = y' - \sigma$, on a

$$\cos^2 \varphi' = \cos^2 y' + 2 \sigma \cos y' \sin y'.$$

La valeur maximum de $\sigma \sin 2 y'$ est environ $0,0003 \times 0,5 = 0,00015$, et si nous écrivons

$$\frac{2 M \operatorname{tg} \sigma}{\sin y'} = \frac{M \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{x'}{2}}{\cos^2 y'}$$

nous commettons une erreur maximum de l'ordre de 0,00000015, ce qui est permis.

Développons

$$\operatorname{tg} \frac{x'}{2} = \frac{x'}{2} + \frac{x'^3}{24} + \dots;$$

$$\operatorname{tg} x' = x' + \frac{x'^3}{3} + \dots;$$

$$\operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{x'}{2} = \frac{x'^2}{2} + \frac{5x'^4}{24} + \dots,$$

et, avec une erreur maximum de l'ordre de 0,00000005, nous calculons $\lg \operatorname{tg} \varphi'$ par la formule

$$\lg \operatorname{tg} \varphi' = \lg \operatorname{tg} y' - \frac{M x'^2}{2} [1 + \operatorname{tg}^2 y'].$$

Pour le calcul de $\frac{M x'^2}{2}$, souvenons-nous de la relation établie antérieurement :

$$\lg \left(1 + \frac{x'^2}{6} + \frac{x'^4}{24} \right) = \frac{M x'^2}{6} + \frac{M x'^4}{36} = [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] + \frac{M x'^4}{45},$$

et, pour le calcul de $\lg \operatorname{tg} \varphi'$, il suffit de prendre

$$\frac{M x'^2}{2} = 3 [\lg \sin 1'' - S_{(x')}].$$

La valeur de $1 + \operatorname{tg}^2 y'$ sera lue dans la table V.

c) *Interpolation de C_3 .* — $\varphi' = y'$ suffit.

Quant à λ , on l'obtient comme suit :

$$(\lambda')'' = [(\lambda')'' - (x')''] + (x')'';$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{0,9966} \quad \text{ou} \quad \lambda = \lambda' [1 - 0,0034];$$

$$\lambda = [1 - 0,0034] \{ [(\lambda')'' - (x')''] + (x')'' \}.$$

$(\lambda')'' - (x')''$ se lit dans la table, page 97 (argument x' appr.). Après avoir ajouté $(x')''$, on corrige de $\frac{34}{10.000}$ et l'on obtient l'argument λ nécessaire pour interpoler C_3 .

d) *Calcul de $(\sigma)''$ et de φ' .*

$$\begin{aligned}\lg (y')'' &= \lg Y + \operatorname{colg} \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}; \\ \lg (\sigma)'' &= [\operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} \sin 1''] + \lg \operatorname{tg} y' - \frac{M}{2} \frac{x'^2}{x'^2} [1 + \operatorname{tg}^2 y'] + \lg x'^2 + C_3 \\ \text{et } (\varphi')'' &= (y')'' - (\sigma)''.\end{aligned}$$

On passe de φ' à φ par la table I.

La table I^{bis}, page 120, donne les différences pour $1'$ et $1''$ lorsque φ' est l'argument. Rappelons que $\varphi' = \varphi + 2h$ et que h est négatif.

Les corrections interpolées seront donc maintenant à ajouter.

2° DÉTERMINATION DE λ . — On a

$$\lg (\lambda)'' = \lg x' + [\lg \sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1''] + \operatorname{colg} \cos \varphi' - C_4.$$

Le calcul est immédiat, puisque pour l'interpolation de C_4 on connaît φ' et une valeur très approchée de λ (voir C_3). Nous savons que C_4 est négative; la correction interpolée dans la table II est donc à ajouter.

3° EXAMEN DE LA MÉTHODE DE CALCUL. — Les formules permettent le calcul avec des erreurs au plus égales à 1 cm, soit environ 0'',0003.

La méthode des approximations successives ne doit s'appliquer qu'une fois, pour la détermination de $[\lg \sin 1'' - S_{(e)}]$; nous avons établi que la seconde approximation de ce poste permet, à coup sûr, le calcul correct de x' , et la suite du calcul est directe. Nous donnons dans le paragraphe suivant un exemple complet.

4° EXEMPLE. — Nous calculons la transformation de (X, Y) en (λ, φ) pour le point GONNI, dont les coordonnées sont connues dans le fuseau GAUSS du 30° méridien (ellipsoïde de CLARKE 1880) :

$$\begin{aligned}X &= 96.078,09 \text{ m;} \\ Y &= 256.092,71 \text{ m,}\end{aligned}$$

soit, dans le système d'axes dont l'origine est à l'intersection du 30° méridien et de l'équateur,

$$\begin{aligned}X &= 96.078,09 - 220.000 = -123.921,91 \text{ m;} \\ Y &= 256.092,71 - 565.000 = -308.907,29 \text{ m.}\end{aligned}$$

a) Calcul de

$$\lg x' = \lg X + \operatorname{colg} a \sqrt{1 - e^2} - [\lg \sin 1'' - S_{(\alpha'')}] - C_2.$$

Un calcul auxiliaire donne la seconde approximation de $[\lg \sin 1'' - S_{(\alpha'')}]$. En cours de calcul, il convient de noter x' approché, dont on a besoin pour interpoler C_2 .

On a

$$\begin{array}{r} \lg X = 5.093\,148\,11 \\ \operatorname{colg} a \sqrt{1 - e^2} = 3.196\,780\,93 \\ \lg x'_{\text{approx.}} = 8.289\,929\,04 \end{array}$$

La première approximation de $[\lg \sin 1'' - S_{(\alpha'')}]$ s'obtient en prenant $\lg x'_{\text{app}} = \lg \sin x'_{\text{app}}$ pour argument pour interpoler $S_{(\alpha')}$. On trouve

$$S_{(\alpha') \text{ approx.}} = 4.685\,547\,37 - \frac{13 \times 16}{108} \cdot 10^{-8} = 4.685\,547\,35$$

et

$$[\lg \sin 1'' - S_{(\alpha'')}]_{1^{\text{e}} \text{ approx.}} = 2752 \cdot 10^{-8}.$$

On en tire la 2^e approximation de $\lg \sin x'$ par

$$\begin{array}{r} 8.28992904 \\ - 2752 \\ \hline \lg \sin x'_{\text{approx.}} = 8.28990152 \end{array} \quad \text{et l'on note } x'_{\text{approx.}} = 1^{\circ}07'01''.$$

La seconde approximation de $S_{(\alpha')}$ donnera le x' correct. 8.28990152 devient l'argument ($\lg \sin x'$) et on lit 2^e approximation de

$$S_{(\alpha')} = 4.685\,547\,37 - \frac{13 \times 13}{108} 10^{-8} = 4.685\,547\,35.$$

Dans le cas traité, la première approximation de $S_{(\alpha')}$ était déjà suffisante.

En pratique courante, l'approximation successive fera l'objet d'un calcul auxiliaire et le 1^{er} tableau du formulaire de calcul se dresse comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \lg X = 5.093\,148\,11 & & \\ \operatorname{colg} a \sqrt{1 - e^2} = 3.196\,780\,93 & \xrightarrow{\text{le calcul auxiliaire donne } [\lg \sin 1'' - S_{(\alpha'')}]_{2^{\text{e}} \text{ approx.}}} & \\ S_{(\alpha')} - \lg \sin 1'' = 9.999\,972\,48 & \xrightarrow{2^{\text{e}} \text{ approximation sous forme colog.}} & \\ C_2 = 0 & \xrightarrow{\text{cologarithme.}} & \\ \hline \lg x' = 8.289\,901\,52 & & \end{array}$$

b) Calcul de $\lg y'$. — C'est le 2^e tableau du formulaire :

$$\begin{aligned} \lg Y &= 5.489\,828\,17 \\ \text{colg } u \sin 1'' \sqrt{1 - e^2} &= 8.511\,206\,06 \\ \hline \lg (y')'' &= 4.001\,034\,23 \\ (y')'' &= 10.023'',8425. \text{ On note } y' = 2^\circ 47' 03'',8. \end{aligned}$$

c) Calcul de σ et de φ .

$$\lg (\sigma)'' = [\text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1''] + \lg \text{tg } y' - \frac{M x^2}{2} (1 + \text{tg}^2 y') + \lg x'^2 + C_3;$$

$$\frac{M x^2}{2} = 3 [\lg \sin 1'' - S_{(x')}] = 3 \times 2752.10^{-8} = 83.10^{-6};$$

$$(1 + \text{tg}^2 y') = 1 + \frac{3}{1000};$$

$$\frac{M x^2}{2} (1 + \text{tg}^2 y') = 83 \left[1 + \frac{3}{1000} \right] 10^{-6} = 83.10^{-6};$$

$$- \frac{M x^2}{2} (1 + \text{tg}^2 y') = + 9.999\,917.$$

Pour l'interpolation de C_3 , on procède comme suit :

Dans la table, page 97,

$$\lambda = x'_{\text{approx.}} = 1^\circ 07' 01'' = 4021''$$

et

$$\varphi' = y' = 2^\circ 47' 04'';$$

on lit

$$(\lambda')'' - (x')'' = 5''$$

et l'on calcule

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{approx.}} &= [1 - 0,0034] [5'' + 4021''] = 4026'' - \frac{4026 \times 34}{10.000} \\ &= 4012'' \end{aligned}$$

Dans la table III, pour

$$\lambda = 1^\circ 06' 52'';$$

$$\varphi' = 2^\circ 47' 04'',$$

on lit

$$C_3 = 55 + \frac{20 \times 7}{10} = 55 + 14 = 69.$$

Le 3^e tableau s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{colg } 2 + \text{colg } \sin 1'' &= 5.013\,395 \\ \lg \text{tg } y' &= 8.686\,951 \\ -\frac{M x^2}{2} (1 + \text{tg}^2 y') &= 9.999\,917 \\ \lg x'^2 &= 6.579\,803 \\ C_3 &= \underline{69} \\ \lg (\tau)'' &= 0.280\,135 \end{aligned}$$

et nous pouvons, sous le 2^e tableau, dresser le 4^e tableau, qui donnera φ' :

$$\begin{aligned} (y')'' &= 10.023'',8425 \\ (\tau)'' &= \underline{1'',9061} \\ (\varphi')'' &= 10.021'',9364 \\ \varphi' &= 2^\circ 47' 01'' 9364. \end{aligned}$$

Il reste à interpoler φ dans la table I^{bis}.

Pour

$$\varphi' = 2^\circ 44' 26'',3425$$

on lit

$$\varphi = 2^\circ 45'.$$

Il faut interpoler, pour la différence,

$$2^\circ 47' 01'' 9364 - 2^\circ 44' 26'',3425 = 2' 35'',5939.$$

On trouve, en se servant des différences,

$$\varphi = 2^\circ 45' + 2' 35'',5939 + \text{corr. pour } 2' + \text{corr. pour } 35'',5939.$$

$$\text{Correction pour } 2' = 0'',20369 \times 2 = 0'',40738.$$

$$\text{Correction pour } 35'',5939 = 0'',003395 \times 35,5939 = 0'',12084.$$

$$\varphi = 2^\circ 47' 36'' 1221.$$

d) Calcul de λ par

$$\lg (\lambda)'' = \lg x' + \lg \sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1'' + \text{colg } \cos \varphi' - C_1.$$

Le calcul de λ vient naturellement dans le formulaire de calcul, sous le calcul de $\log x'$.

On a

$$\begin{array}{rcl}
 \lg x' & = & 8.289\,901\,52 \\
 \lg \sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1'' & = & 5.312\,942\,73 \\
 \operatorname{colg} \cos \varphi' & = & 0.000\,512\,83 \\
 C_1 & = & 6 \\
 \hline
 \lg (\lambda)'' & = & 3.603\,357\,14 \\
 \lambda & = & 4011'',9651 \\
 \lambda & = & 1^{\circ}06'51'',9651 \\
 \text{longitude} & = & 28^{\circ}53'08'',0349.
 \end{array}$$

Nous avons retrouvé, à un dix-millième de seconde près, les latitude et longitude du point GONINI.

Nous proposons le formulaire de calcul suivant :

FORMULES

pour le calcul des coordonnées géographiques
connaissant les coordonnées rectangulaires de GAUSS.

Ellipsoïde de Clarke 1880.

$$\lg x' = \lg X + \operatorname{colg} a \sqrt{1 - e^2} + [S_{(x')} - \lg \sin 1''] - C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (y')'' = \lg Y + \operatorname{colg} a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}$$

$$\lg (\sigma)'' = [\operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} \sin 1''] + \lg \operatorname{tg} y' - \frac{Mx^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y') + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Tables IV et V})$$

$$\frac{Mx'^2}{2} = 3 [\lg \sin 1'' - S_{(x')}]$$

$$\varphi' = y' - \sigma$$

$$\varphi = \varphi' - 2h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg (\lambda)'' = \lg x' + \lg \sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1'' + \operatorname{colg} \cos \varphi' - C_4 \quad (\text{Table II})$$

Un calcul préliminaire recherche la seconde approximation de

$$\lg \sin 1'' - S_{(x')}.$$

Méridien central 30° E. G.

Log sin 1''	4.68557487
Appellation	GONINI
X	96.078,09
X origine	220.000,00
X Gauss	123.921,91
Y	256.092,71
Y origine	565.000,00
Y Gauss	- 308.907,29
lg X	5,09314811
colg a $\sqrt{1 - e^2}$	3.19678093
$S_{(x')} - \lg \sin 1''$	9,99997248
C_2	0
lg x'	8,28990152
lg $\sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1''$	5.31294273
colg cos φ'	0,00051283
C_4	0
lg $(\lambda)''$	3,60335714
$(\lambda)''$	4014,9651
λ	1°06'51,9651
méridien central	30°
Longitude	28°53'08,0349
lg Y	5,48982817
colg a sin 1'' $\sqrt{1 - e^2}$	8.51120606
lg $(y')''$	4,00103423
$(y')''$	10.023,8425
$(\sigma)''$	1,9061
$(\varphi')''$	10.021,9364
φ'	2°47'01,9364
Latitude	2°47'36,1221
colg 2 + colg sin 1''	5.013395
lg tg y'	8,686951
$-\frac{Mx^2}{2} [1 + \operatorname{tg}^2 y']$	9,999917
lg x'^2	6,579803
C_3	69
lg $(\sigma)''$	0,280135

$$x'_{\text{appr}} = 1\ 07'01;$$

$$y' = 2°47'03,8$$

FORMULES

pour le calcul des coordonnées géographiques
connaissant les coordonnées rectangulaires de GAUSS.

Ellipsoïde de Clarke 1880.

$$\lg x' = \lg X + \operatorname{colg} a \sqrt{1 - e^2} + [S_{(x')} - \lg \sin 1''] - C_2 \quad (\text{Table III})$$

$$\lg (y')'' = \lg Y + \operatorname{colg} a \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}$$

$$\lg (\sigma)'' = [\operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} \sin 1''] + \lg \operatorname{tg} y' - \frac{M x'^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y') + \lg x'^2 + C_3 \quad (\text{Tables IV et V})$$

$$\frac{M x'^2}{2} = 3 [\lg \sin 1'' - S_{(x')}]$$

$$\varphi' = y' - \sigma$$

$$\varphi = \varphi' - 2 h \quad (\text{Table I})$$

$$\lg (\lambda)'' = \lg x' + \lg \sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1'' + \operatorname{colg} \cos \varphi' - C_1 \quad (\text{Table II}).$$

Un calcul préliminaire recherche la seconde approximation de

$$\lg \sin 1'' - S_{(x')}.$$

Méridien central :	
Log sin 1'' Appellation.	4,68557487
X X origine	220.000,00
X Gauss	
Y Y origine	565.000,00
Y Gauss	
lg X colg a $\sqrt{1 - e^2}$ $S_{(x')} - \lg \sin 1''$ C_2	3,19678093
lg x' lg $\sqrt{1 - e^2} - \lg \sin 1''$ colg cos φ' C_1	5,31294273
lg $(\lambda)''$ $(\lambda)''$ λ méridien central Longitude	
lg Y colg a sin 1'' $\sqrt{1 - e^2}$	8,51120606
lg $(y')''$ $(y')''$ $(\sigma)''$	
$(\varphi')''$ φ' Latitude	
colg 2 + colg sin 1'' lg tg y' $-\frac{M x'^2}{2} [1 + \operatorname{tg}^2 y']$ lg x'^2 C_3	5,013395
lg $(\sigma)''$	

1^{er} Tableau5^e Tableau2^e Tableau4^e Tableau3^e Tableau

TABLE 1^{bis}

$$\varphi' = \varphi + 2h$$

φ	φ'	Diff pour 1' (φ')	Diff. pour 1" (φ')
0°00'	00°00'00"0000	0,20514	0,003419
05	04 58 9777	14	3419
10	09 57 9555	14	3419
15	14 56 9333	14	3419
20	19 55 9111	12	3419
25	24 54 8890	11	3419
30	29 53 8669	09	3418
35	34 52 8449	07	3418
40	39 51 8230	05	3418
45	44 50 8012	03	3417
50	49 49 7795	0,20499	3417
55	54 48 7580	97	3416
1°00	59 47 7366	95	3416
05	01°04'46"7153	91	3415
10	09 45 6942	87	3415
15	14 44 6733	83	3414
20	19 43 6526	79	3413
25	24 42 6321	75	3413
30	29 41 6118	71	3412
35	34 40 5917	65	3411
40	39 39 5719	59	3410
45	44 38 5524	55	3409
50	49 37 5331	49	3408
55	54 36 5141	43	3407
2°00	59 35 4954	37	3406

TABLE I^{bis}

$$\varphi' = \varphi + 2h$$

φ	φ'	Diff. pour 1' (φ')	Diff. pour 1'' (φ')
2°00'	01°59'35",4954		
05	02°04'34",4770	0,20437	0,003406
10	09 33 4589	31	3405
15	14 32 4412	23	3404
20	19 31 4238	17	3403
25	24 30 4067	11	3402
30	29 29 3901	0,20401	3400
35	34 28 3739	0,20393	3399
40	39 27 3580	87	3398
45	44 26 3425	79	3396
50	49 25 3275	69	3395
55	54 24 3129	61	3394
3°00	59 23 2988	50	3392
05	03°04'22",2851	42	3390
10	09 21 2719	32	3389
15	14 20 2591	24	3387
20	19 19 2469	12	3385
25	24 18 2352	02	3384
30	29 17 2241	0,20290	3382
35	34 16 2135	80	3380
40	39 15 2034	70	3378
45	44 14 1939	58	3376
50	49 13 1850	46	3374
55	54 12 1767	34	3372
4°00	59 11 1689	24	3371
		11	3369

122 L'EMPLOI GÉODÉSIQUE DES PROJECTIONS CONFORMES

TABLE 1^{bis}

$$\varphi' = \varphi + 2h$$

φ	φ'	Diff. pour 1' (φ')	Diff. pour 1'' (φ')
4°00'	03°59'11",1689	0°,20211	0,003369
05	04°04'10",1618	0°,20197	3366
10	09 09 1553	83	3364
15	14 08 1495	69	3362
20	19 07 1444	59	3360
25	24 06 1398	45	3358
30	29 05 1359	29	3356
35	34 04 1328	17	3353
40	39 03 1303	03	3351
45	44 02 1285	0°,20085	3348
50	49 01 1276	71	3345
55	54 00 1274	57	3343
5°00	58 59 1279	42	3340
05	05°03'58",1291	24	3337
10	08 57 1312	08	3335
15	13 56 1341	0°,19994	3332
20	18 55 1377	76	3329
25	23 54 1422	58	3326
30	28 53 1476	44	3324
35	33 52 1537	28	3321
40	38 51 1607	07	3318
45	43 50 1686	0°,19869	3315
50	48 49 1774	71	3312
55	53 48 1871	55	3309
6°00	58 47 1976		

TABLE V

y'	$1 + \operatorname{tg}^2 y'$
0°	1
1°	1
2°	1,001
3°	1,003
4°	1,005
5°	1,008
6°	1,011
7°	1,015
8°	1,020
9°	1,025
10°	1,031
11°	1,038
12°	1,045
13°	1,053
14°	1,062

10. FORMULES POUR LE CALCUL A LA MACHINE.

Nous ne traitons que le passage de (λ, φ) à (X, Y) .

I. — PASSAGE DE (λ, φ) à (λ', φ') :

$$(\lambda')'' = \frac{(\lambda)''}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880 :

$$\sqrt{1-e^2} = 0,996\,592\,46;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1,003\,419\,20,$$

φ' s'obtient par la table.

II. — CALCUL DE X.

$$\sin x' = \cos \varphi' \sin \lambda' :$$

$$X = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{M} \lg \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x'}{2} \right] = a \sqrt{1-e^2} \left[x' + \frac{x'^3}{6} + \frac{x'^5}{24} + \frac{61}{5940} x'^7 + \dots \right].$$

Notons

$$A = a \sqrt{1-e^2}; \quad B = x' + \frac{x'^3}{6} + \dots$$

Nous désirons calculer X avec le chiffre des centimètres exact. Avec quelle approximation faut-il calculer A et B?

Soient ε_A et ε_B les parties négligées de A et de B.

Ordre de grandeur de A = 6.500.000 m.

Ordre de grandeur de $B_{\max} = 0,05$ (3°).

$$X = (A + \varepsilon_A)(B + \varepsilon_B) = AB + \varepsilon_A B + \varepsilon_B A + \varepsilon_A \varepsilon_B;$$

a) $\varepsilon_A B < 0,005$ m

$$\text{exige } \varepsilon_A < \frac{5}{10^3} \cdot \frac{1}{0,05}$$

$$\varepsilon_A < 0^m 10.$$

Tous les chiffres de $a = 6.378.249,2$ m sont nécessaires.

b) Il est toujours possible de rendre $\varepsilon_B A$ négligeable.

En effet, pour que $\varepsilon_B A < 0,005$ m, il suffit que

$$\varepsilon_B < \frac{5}{10^3} \cdot \frac{1}{6.500.000}$$

$$\varepsilon_B < \frac{1}{1.300.000.900}.$$

On a

$$x'_{\max} = 0,05$$

$$x'^2 = 0,0025$$

$$x'^3 = 0,000125$$

$$x'^4 = 0,00000625$$

$$x'^5 = 0,0000003125$$

$$x'^6 = 0,000000015625$$

$$x'^7 = 0,00000000078125$$

$$x'^7 \sim \frac{1}{1.300.000.000}$$

$$\frac{61 x'^7}{5940} \sim 10^{-11},$$

et B pourra être limité à

$$x' + \frac{x'^3}{6} + \frac{x'^5}{24}.$$

c) $\varepsilon_A \varepsilon_B$ est évidemment toujours négligeable et nous obtiendrons le chiffre correct des centimètres de X par

$$X = a \sqrt{1 - e^2} \left[x' + \frac{x'^3}{3} + \frac{x'^5}{24} \right],$$

où

$$a = 6.378.249,2 \text{ m};$$

$$\sqrt{1 - e^2} = 0,996\,592\,46;$$

$$a \sqrt{1 - e^2} = 6.356.515,06$$

Exprimons

$$x', \frac{x'^3}{6}, \frac{x'^5}{24}$$

en fonction de $\sin x'$:

$$x' = \sin x' + \frac{\sin^3 x'}{6} + \frac{3 \sin^5 x'}{4} + \dots;$$

$$x' = \sin x' \left[1 + \sin^2 x' \left(\frac{1}{6} + \frac{3 \sin^2 x'}{40} \right) \right];$$

$$x'^3 = \sin^3 x' \left[1 + 3 \sin^2 x' \left(\frac{1}{6} + \frac{3 \sin^2 x'}{40} \right) + 3 \sin^4 x' \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \sin^2 x'}{40} + \frac{9 \sin^4 x'}{1600} \right) \right] + \dots,$$

où nous négligeons les termes en x'^7 et les puissances suivantes :

$$x'^3 = \sin^3 x' \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} \right];$$

$$\frac{x'^3}{6} = \frac{\sin^3 x'}{6} \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} \right].$$

On a aussi, pour calculer x'^5 , ce qui permet de se limiter au degré 4 :

$$x'^5 = \sin^5 x' \left[1 + 2 \sin^2 x' \left(\frac{1}{6} + \frac{3 \sin^2 x'}{40} \right) + \sin^4 x' \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \sin^2 x'}{40} + \frac{9 \sin^4 x'}{1600} \right) \right];$$

$$x'^5 = \sin^5 x' \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{3} + \frac{6}{40} \sin^4 x' + \frac{\sin^4 x'}{36} \right]$$

et

$$x'^5 = \sin^5 x' \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} \right] \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{3} + \frac{6}{40} \sin^4 x' + \frac{\sin^4 x'}{36} \right],$$

ce qui, en négligeant les 7^{es} puissances, se limite à $x'^5 = \sin^5 x'$.

En remplaçant on trouve

$$X = a \sqrt{1-e^2} \left[\sin x' + \frac{\sin^3 x'}{6} + \frac{3 \sin^5 x'}{40} + \frac{\sin^3 x'}{6} + \frac{\sin^5 x'}{12} + \frac{\sin^5 x'}{24} \right];$$

$$X = a \sqrt{1-e^2} \left[\sin x' + \frac{\sin^3 x'}{3} + \frac{\sin^5 x'}{5} \right],$$

formule qui, jointe à $\sin x' = \cos \varphi' \sin \lambda'$, permet le calcul rapide de X, à la machine.

III. — CALCUL DE Y. — Rappelons

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2};$$

$$y' = \varphi' + \sigma;$$

$$Y = a \sqrt{1-e^2} y'.$$

Pour calculer

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2},$$

nous procédons comme suit :

$$\begin{aligned} \sin \sigma &= \sin \varphi' \frac{\sin x'}{\sqrt{1-\sin^2 x'}} - \frac{\sin \lambda'}{1+\cos \lambda'} \\ &= \sin \varphi' \sin x' \sin \lambda' \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x'}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\sin^2 \lambda'}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x'}} &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x' + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} \sin^4 x' + \dots \\ &= 1 + \frac{\sin^2 x'}{2} + \frac{3}{8} \sin^4 x' + \dots \end{aligned}$$

et

$$\sqrt{1-\sin^2 \lambda'} = 1 - \frac{\sin^2 \lambda'}{2} - \frac{\sin^4 \lambda'}{8};$$

$$1 + \sqrt{1-\sin^2 \lambda'} = 2 - \frac{\sin^2 \lambda'}{2} - \frac{\sin^4 \lambda'}{8} - \dots;$$

d'où

$$\sin \sigma = \sin \varphi' \sin x' \sin \lambda' \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} + \frac{3}{8} \sin^4 x' + \dots \right] \left[\frac{1}{2 - \frac{\sin^2 \lambda'}{2} - \frac{\sin^4 \lambda'}{8} - \dots} \right].$$

Nous avons établi antérieurement que $\sin \sigma$ peut être confondu avec σ .

Quelle précision faut-il à σ ? La même que pour φ' ; nous acceptons $0'',0003 = 1 \text{ cm}$ et l'erreur maximum sur σ égale à

$$0'',00015 = 0,005 \text{ m};$$

$$1'' = 0,000005 \text{ radian};$$

$$0'',00015 = 0,000\,000\,000\,75 \text{ radian} = \frac{3}{4} \frac{1}{10^9}.$$

Or, en confondant, pour le calcul des approximations, x' et λ' ,

$$(\sin^4 x')_{\max} = (\sin^4 \lambda')_{\max} = 0,000\,006 = 6 \cdot 10^{-6};$$

$$(\sin^6 x')_{\max} = (\sin^6 \lambda')_{\max} = 15 \cdot 10^{-9}.$$

En négligeant les puissances supérieures à 6, on a

$$\sigma = \sin \varphi' \sin x' \sin \lambda' \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} + \frac{3 \sin^4 x'}{8} \right] \left[\frac{2 + \frac{\sin^2 \lambda'}{2} + \frac{\sin^4 \lambda'}{8}}{4 - \sin^4 \lambda' \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \lambda'}{8} \right)^2} \right].$$

L'ordre de grandeur maximum de σ est, pour les latitudes congolaises,

$$\sigma_{\max} = \frac{0,25 \times 0,0025}{2} = \frac{625 \cdot 10^{-6}}{2}.$$

Notons

$$\varepsilon = \sin^4 \lambda' \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \lambda'}{8} \right).$$

On aura, aux valeurs maxima,

$$\sigma = \frac{625 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{4 - \varepsilon}$$

et

$$\sigma - \frac{\varepsilon \sigma}{4} = \frac{625 \cdot 10^{-6}}{2}.$$

Nous pourrions négliger ε si

$$\frac{\varepsilon \sigma}{4} \leq \frac{3}{4} \frac{1}{10^9}.$$

On a

$$\left(\frac{\varepsilon \sigma}{4} \right)_{\max.} = \frac{625 \cdot 10^{-6}}{4} \cdot \frac{625 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot \frac{1}{4} \sim 10^{-10}$$

et l'on peut écrire

$$\sigma = \frac{\sin \varphi' \sin x' \sin \lambda'}{4} \left[1 + \frac{\sin^2 x'}{2} + \frac{3}{8} \sin^4 x' \right] \left[2 + \frac{\sin^2 \lambda'}{2} + \frac{\sin^4 \lambda'}{8} \right].$$

soit

$$\sigma = \frac{\sin \varphi' \sin x' \sin \lambda'}{4} \left[2 + \sin^2 x' + \frac{3}{4} \sin^4 x' + \frac{\sin^2 \lambda'}{2} + \frac{\sin^2 x' \sin^2 \lambda'}{4} + \frac{\sin^2 \lambda'}{8} \right]$$

ce qui peut s'écrire

$$\sigma = \frac{\sin \varphi' \sin x' \sin \lambda'}{4} \left[2 + \sin^2 x' + \frac{\sin^2 \lambda'}{2} + \frac{9}{8} \sin^4 x' \right].$$

Pratiquement le terme $\frac{9}{8} \sin^4 x'$ n'obtient $\frac{1}{109}$ qu'aux coins des fuseaux GAUSS et nous le négligeons.

De plus, en confondant $\frac{\sin^2 \lambda'}{2}$ et $\frac{\sin^2 x'}{2}$, l'erreur sur σ est de l'ordre de $\frac{1}{2} \frac{1}{109}$.

Finalement nous calculons à la machine

$$\sigma = \sin \varphi' \sin x' \sin \lambda' \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \sin^2 x' \right].$$

IV. — RÉSUMÉ. — Le calcul de X et Y peut s'entreprendre, à la machine, comme suit :

a) passage de φ à φ' par les tables :

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}};$$

b) $\sin x' = \sin \lambda' \cos \varphi'$:

$$X = a \sqrt{1-e^2} \left[\sin x' + \frac{\sin^3 x'}{3} + \frac{\sin^5 x'}{5} \right];$$

c) $\sigma = \sin \varphi' \sin x' \sin \lambda' \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \sin^2 x' \right]$:

$$y' = \varphi' + \sigma \text{ (en radian);}$$

$$Y = a \sqrt{1-e^2} y'.$$

V. — CALCUL DE LA CONVERGENCE MÉRIDIENNE. — Rappelons

$$\cos \gamma = \frac{\cos \lambda'}{\cos x'}$$

et

$$\sin \gamma = \frac{\sin \lambda' \sin \varphi'}{\cos x'}.$$

On en tire

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \lambda' \sin \varphi',$$

formule remarquablement simple.

Bruxelles, le 12 octobre 1950.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	3
 Note sur le calcul des triangulations dans les systèmes de représentation plane conforme.	
Généralités. Exposé du problème	5
I. — Équation différentielle générale des transformées planes de géodésiques dans un système de représentation conforme	7
Remarque importante sur le sens de la courbure des transformées planes de géodésiques	10
Considérations sur la valeur de la courbure des transformées planes	12
II. — Formule pour calculer les réductions angulaires	15
III. — Formule pour le calcul des altérations de longueur	22
IV. — Application à la projection de Gauss utilisée au Congo belge... ..	23
Rappel des formules de passage	23
Détermination de la portée de la projection	25
Application des formules de Laborde	28
Calcul des réductions angulaires	29
Calcul des altérations de longueur	37
Résumé des résultats obtenus	41
Exemple d'application des formules	43
Conclusions	57
 Correspondance des coordonnées géographiques et des coordonnées rectangulaires de la projection conforme de Gauss pour le Congo belge.	
Objet — Définition — Plan de la note	65
1. Conception d'une projection conforme	66
2. Projection de Mercator — Représentation conforme d'une sphère sur un plan ...	68
3. Représentation conforme de l'ellipsoïde sur le plan	69
4. Représentation conforme de l'ellipsoïde sur une sphère	71

	Pages.
5. Le système de représentation plane conforme de Gauss appliqué au Congo belge	75
6. Formules pratiques de calcul des coordonnées rectangulaires de Gauss pour le Congo belge. Tables pour le calcul. Exemple d'application	78
Formulaire	87
7. Projet d'emploi de fuseaux Gauss couvrant 6 degrés de longitude	92
Table I pour le passage de l'ellipsoïde à la sphère	94
Table II	98
Tables III et IV	99
8. Étude de la convergence méridienne dans la projection conforme de Gauss (système équatorial)	100
A. Rappel d'un théorème de Clairaut	100
B. Étude de la convergence méridienne	102
9. Problème inverse. Calcul des coordonnées géographiques connaissant les coordonnées rectangulaires de Gauss	108
Formulaire	118
Table I ^{bis}	120
Table V	123
10. Formules pour le calcul à la machine	123



IMPRIMERIE MARCEL HAYEZ
Rue de Louvain, 112, Bruxelles
Dom. légal : av. de l'Horizon, 39

Printed in Belgium.